উচ্চমাধ্যমিক ঐচ্ছিক গণিত

দ্বিতীয় খণ্ড

(উচ্চমাধ্যমিক ও বহুমুখী বিদ্যালয়ের দশম শ্রেণীর পাঠ্য)

কলিকাতা সুরেন্দ্রনাথ কলেজিয়েট স্কুলের প্রধান গণিত-শিক্ষক

শ্রীচারুচন্দ্র চক্রবর্তী

ও

কলিকাতা রাণীভবানী বিদ্যালয়ের প্রধান গণিত-শিক্ষক

শ্রীমানদাচরণ গুপ্ত

প্রণীত

আধুনিক প্রকাশক

১৯৭-বি, মুক্তারাম বাবু ষ্ট্রীট্, কলিকাতা-৭

প্রকাশক :

শ্রীনির্মলেন্দু দত্ত

১৯৭-বি, মুক্তারাম বাবু ষ্ট্রীট্

কলিকাতা-৭

দ্বিতীয় সংস্করণ—নভেম্বর, ১৯৬০

মুদ্রাকর :

শ্রীঅজিতকুমার বসু

শক্তি প্রেস

২৭/৩বি, হরি ঘোষ ষ্ট্রীট, কলিকাতা-৬

সূচীপত্র

সামতলিক জ্যামিতি (*Plane Geometry*)

ঘন জ্যামিতি

পরিমিতি (ঘনক্ষেত্র) (*Mensuration*)

স্থানাঙ্ক-জ্যামিতি (*Co-ordinate Geometry*)

বীজগণিত (*Algebra*)

ত্রিকোণমিতি (*Trigonometry*)

SYLLABUS

CLASS X

Algebra

Simultaneous equations in two unknowns of which one is quadratic and the other linear. Elementary ideas of Elimination ; A. P. and G. P. (Finite Series), H. P. (Definition only) ; Variations ; Logarithms (Note—use of slide rule may be encouraged) ; Irrational quantities, Complex numbers and their geometrical representation.

Geometry

Theoretical

The angles made by a tangent to a circle with a chord drawn from the point of contact are respectively equal to the angles in the alternate segments of the circle.

If two chords of a circle intersect either inside or outside the circle, the rectangle contained by the parts of one is equal to the rectangle contained by the parts of the other. (Note—This proposition may be proved with the help of the properties of similar triangles).

Practical

Construction of tangents to a circle and of common tangents to two circles (both cases). Construction of regular figures of 3, 4, 5 or 6 sides in or about a circle.

Construction of a mean proportional to two given straight lines. Construction of a square equal in area to a given polygon.

Solid Geometry

Axioms (i) One and only one plane may be made to pass through any two intersecting straight lines.

(*ii*) Two intersecting planes cut one another in a straight line and in no point outside it.

To prove :—1. If a straight line is perpendicular to each of two intersecting straight lines at their point of intersection, it is also perpendicular to the plane in which they lie.

2. All straight lines drawn perpendicular to a given straight line at a given point of it are coplanar.

3. If two straight lines are parallel and if one of them is perpendicular to a plane, then the other is also perpendicular to the plane.

Concept of angle between two planes and angle between a straight line and a plane. Concept of parallelism of planes. Concept of a line being parallel to a plane. Concept of skew lines.

Co-ordinate Geometry

Rectangular Cartesian co-ordinates in a plane ; lengths of segments : Sections of a finite segment in a given ratio ; Area of a triangle ; Straight line.

Mensuration

Parallelepipeds, Right circular cones, Prisms and Pyramids (Expressions, *without proof*, of the surfaces and volumes of these solids).

Trigonometry

Trigonometrical ratios of any angle ; Trigonometrical ratios of angles associated with a given angle ; Addition and subtraction formulae ; transformation of products and sums ; Multiple and sub-multiple angles.

Note. It is recommended that Solid Geometry and Mensuration of solids be taught through the drawing board, and the making and handling of solid models.

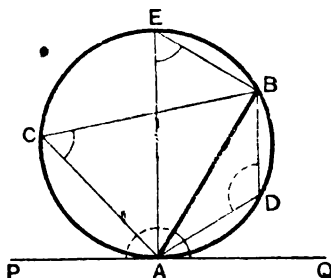
সামতলিক জ্যামিতি

প্রথম অধ্যায়

উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা

উপপাদ্য 15

কোন সরলরেখা একটি বৃত্তকে স্পর্শ করিলে এবং স্পর্শবিন্দু হইতে কোন জ্যা অঙ্কিত করিলে স্পর্শকের সহিত যে দুইটি কোণ উৎপন্ন হয়, তাহারা যথাক্রমে একান্তর বৃত্তাংশস্থ কোণদ্বয়ের সমান।

[The angles made by a tangent to a circle with a chord drawn from the point of contact are respectively equal to the angles in the alternate segments of the circle.]

মনে কর, PAQ স্পর্শক ABC বৃত্তকে A-বিন্দুতে স্পর্শ করিয়াছে এবং AB জ্যা বৃত্তটিকে ACB, ADB দুইটি বৃত্তাংশে বিভক্ত করিয়াছে।

প্রমাণ করিতে হইবে যে,

(1) $\angle$BAQ = একান্তর বৃত্তাংশস্থ যে কোন $\angle$ACB

এবং (2) $\angle$BAP = একান্তর বৃত্তাংশস্থ যে কোন $\angle$ADB.

অঙ্কন। A-বিন্দু দিয়া AE ব্যাস টান এবং EB যুক্ত কর।

প্রমাণ। $\angle ABE$ অর্ধবৃত্তস্থ বলিয়া এক সমকোণ।

$\therefore$ $\angle AEB = \angle EAB$-এর পূরক।

কিন্তু EA, PQ স্পর্শকের স্পর্শবিন্দু A-তে ব্যাস বলিয়া, EA এবং AQ পরস্পর লম্ব ; $\therefore$ $\angle BAQ = \angle EAB$ এর পূরক ;

$\therefore$ $\angle BAQ = \angle AEB = \angle ACB$ (একই বৃত্তাংশস্থ বলিয়া) ...(1)

আবার, ACBD চতুর্ভুজটি বৃত্তস্থ বলিয়া, $\angle ACB + \angle ADB = 2$ সমকোণ ;
কিন্তু $\angle BAQ + \angle BAP = 2$ সমকোণ, $\therefore$ $\angle ACB + \angle ADB = \angle BAQ + \angle BAP$

কিন্তু $\angle ACB = \angle BAQ$, $\therefore$ $\angle BAP = \angle ADB$. ...(2)

অনুসিদ্ধান্ত। কোন সরলরেখা বৃত্তের কোন জ্যা-এর প্রান্তবিন্দুর সহিত একান্তর বৃত্তাংশস্থ কোণের সমান কোণ উৎপন্ন করিলে ঐ সরলরেখাটি বৃত্তের স্পর্শক হইবে।

মূল উপপাদ্যের চিত্রে, $\angle BAQ = \angle ACB$ হইলে, AQ বৃত্তের স্পর্শক হইবে।

কারণ, $\angle EAQ = \angle EAB + \angle BAQ = \angle EAB + \angle ACB$

$= \angle EAB + \angle AEB =$ এক সমকোণ।

অতএব, AQ বৃত্তের স্পর্শক।

অনুশীলনী 1

1. কোন বৃত্তের জ্যা AB কেন্দ্রে $120°$ কোণ উৎপন্ন করে। A ও B বিন্দুতে স্পর্শক দুইটির অন্তর্ভূত কোণটি নির্ণয় কর।

2. ABC ত্রিভুজের $\angle A = 62°$, $\angle B = 52°$, $\angle C = 66°$; ABC বৃত্তের A, B, C বিন্দুতে স্পর্শক তিনটি মিলিত হইয়া যে ত্রিভুজ উৎপন্ন করে, তাহার প্রত্যেক কোণের পরিমাণ নির্ণয় কর।

3. কোন বৃত্তের PA, PB দুইটি স্পর্শকের অন্তর্ভূত কোণটি $30°$. AB-র যে দিকে P আছে তাহার বিপরীত দিকে C পরিধিস্থ একটি বিন্দু। $\angle ABC$-এর পরিমাণ কত ?

4. বহির্বিন্দু হইতে কোন বৃত্তের দুইটি স্পর্শক সমান। Two tangents to a circle from an exterual point are equal.

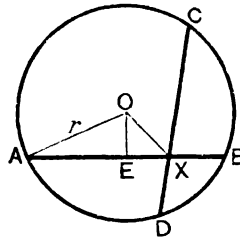
5. দুইটি বৃত্ত পরস্পর P-বিন্দুতে স্পর্শ করিয়াছে। P-বিন্দু দিয়া অঙ্কিত দুইটি সরলরেখা বৃত্তপরিধিদ্বয়কে যথাক্রমে A, B ও C, D বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। প্রমাণ কর যে AC || BD. (C. U. 1947)

6. ABC একটি সমবাহু ত্রিভুজ। প্রমাণ কর যে ABC বৃত্তের A, B, C বিন্দুতে তিনটি স্পর্শক আর একটি সমবাহু ত্রিভুজ উৎপন্ন করে।

বৃত্ত সংশ্লিষ্ট আয়তক্ষেত্র

উপপাদ্য 16

কোন বৃত্তের দুইটি জ্যা বৃত্তের অন্তঃস্থ কোন বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করিলে একটি জ্যা-এর অংশদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র অপরটির অংশদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের সমান হইবে।

[If two chords of a circle intersect at a point within it, the rectangle contained by the segments of the one is equal to the rectangle contained by the segments of the other.]

মনে কর ABC বৃত্তের AB ও CD জ্যা দুইটি বৃত্তের অন্তঃস্থ X-বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করিয়াছে।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, AX.XB = CX.XD.

মনে কর O, বৃত্তের কেন্দ্র এবং r উহার ব্যাসার্ধ। O হইতে AB-র উপর OE লম্ব টান। OA এবং OX যুক্ত কর।

প্রমাণ। OE, AB জ্যা-এর উপর লম্ব ; $\therefore$ AE = EB.

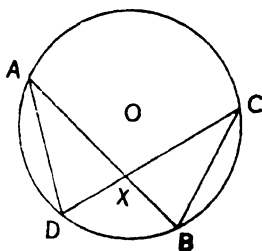
$$AX \cdot XB = (AE + EX)(EB - EX) = (AE + EX)(AE - EX)$$

$$= AE^2 - EX^2 = (OA^2 - OE^2) - (OX^2 - OE^2)$$

[$\because$ E বিন্দুস্থ কোণ সমকোণ]

$$= OA^2 - OX^2 = r^2 - OX^2.$$

O হইতে CD-র উপর লম্ব টানিয়া এবং OC যুক্ত করিয়া এইরূপে প্রমাণ করা যায় যে $CX.XD = r^2 - OX^2$. $\therefore$ $AX.XB = CX.XD$.

দ্বিতীয় প্রমাণ। মনে কর ABC বৃত্তের AB ও CD জ্যা দুইটি বৃত্তের অন্তঃস্থ X-বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করিয়াছে।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, AX.XB = CX.XD.

AD, BC যুক্ত কর।

প্রমাণ। AXD এবং CXB ত্রিভুজদ্বয়ে, $\angle AXD = \angle CXB$ (বিপ্রতীপ কোণ)

$\angle A = \angle C$ (একই DB চাপের উপর অবস্থিত পরিধিস্থ কোণ বলিয়া)

$\therefore$ AXD এবং CXB ত্রিভুজদ্বয় সদৃশকোণী,

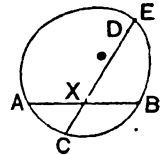
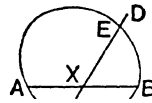
$\therefore \frac{\quad}{CX} = \frac{D}{XB}.$

$\therefore$ AX.XB = CX.XD. অর্থাৎ আয়ত AX, XB = আয়ত CX, XD.

প্রথম অনুসিদ্ধান্ত। বৃত্তের অন্তঃস্থ কোন নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া কতকগুলি জ্যা অঙ্কিত করিলে উহাদের প্রত্যেকের অংশদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র ঐ বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত জ্যা-টির অর্ধেকের উপরিস্থিত বর্গক্ষেত্রের সমান হইবে।

দ্বিতীয় অনুসিদ্ধান্ত। যদি দুইটি সীমাবদ্ধ সরলরেখা পরস্পর এরূপ অন্তঃস্থ-ভাবে ছেদ করে যে একটির অংশদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র অপরটির অংশদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের সমান হয়, তাহা হইলে সরলরেখাদ্বয়ের প্রান্তবিন্দু চারিটি সমবৃত্ত হইবে।

[If two finite straight lines cut one another internally so that the rectangle contained by the segments of the one is equal to the rectangle contained by the segments of the other, the four extremities of the straight lines are concyclic.]

মনে কর AB, CD দুইটি সীমাবদ্ধ সরলরেখা X-বিন্দুতে অন্তঃস্থ ভাবে ছেদ করিয়াছে এবং মনে কর $AX.XB = CX.XD$.

প্রমাণ করিতে হইবে যে, A, C, B, D সমবৃত্ত।

প্রমাণ। যদি A, C, B, D সমবৃত্ত না হয়, মনে কর A, C, B দিয়া অঙ্কিত বৃত্ত CD বা বর্ধিত CD-কে E-বিন্দুতে ছেদ করিল। তাহা হইলে AB, CE জ্যা-দ্বয় X-বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে বলিয়া $AX.XB = CX.XE$;

কিন্তু $AX.XB = CX.XD$ (কল্পনা)

$\therefore \quad CX.XE = CX.XD.$

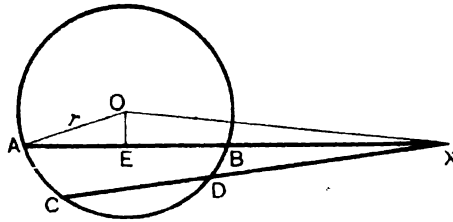
$\therefore \quad XE = XD$, অর্থাৎ E বিন্দু D বিন্দুর সহিত মিলিয়া যাইবে।

অতএব A, C, B, D. সমবৃত্ত।

দ্রষ্টব্য। ইহা উপপাদ্য 16-এর বিপরীত প্রতিজ্ঞা।

উপপাদ্য 17

কোন বৃত্তের দুইটি জ্যা যদি বৃত্তের বহিঃস্থ কোন বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করে, তাহা হইলে একটির অংশদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র অপরটির অংশদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের সমান হইবে।

[If two chords of a circle, when produced, cut at a point outside it, the rectangles contained by their segments are equal.]

মনে কর ABC বৃত্তের AB, CD জ্যা দুইটি বর্দ্ধিত হইয়া বৃত্তের বহিঃস্থ X বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করিয়াছে।

প্রমাণ করিতে হইবে যে $AX.XB = CX.XD$

মনে কর O বৃত্তের কেন্দ্র, r উহার ব্যাসার্দ্ধ।

O হইতে AB-র উপর OE লম্ব টান এবং OA, OX যুক্ত কর।

প্রমাণ। OE, AB জ্যা-এর উপর লম্ব, $\therefore\ AE = EB$

$AX.XB = (EX + AE)\ (EX - EB)$

$\quad = (EX + AE)\ (EX - AE) = EX^2 - AE^2$

$\quad = (OX^2 - OE^2) - (OA^2 - OE^2)$ [$\because$ E-বিন্দুস্থ কোণ সমকোণ]

$\quad = OX^2 - OA^2 = OX^2 - r^2$

O হইতে CD-র উপর লম্ব টানিয়া এবং OC যুক্ত করিয়া এইরূপে প্রমাণ করা যায় যে $CX.XD = OX^2 - r^2$.

$\therefore\ AX.XB = CX.XD.$

দ্বিতীয় প্রমাণ। মনে কর ABC বৃত্তের AB ও CD জ্যা দুইটি বৃত্তের বহিঃস্থ X বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করিয়াছে।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, AX. XB = CX. XD.

AD, BC যুক্ত কর।

প্রমাণ। AXD এবং CXB ত্রিভুজদ্বয়ে,

$\angle A = \angle C$ (একই DB চাপের উপর অবস্থিত পরিধিস্থ কোণ বলিয়া)

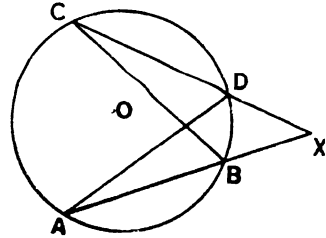
$\angle AXD = \angle CXB$

(অভিন্ন কোণ বলিয়া)

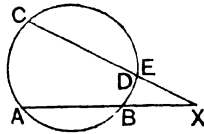
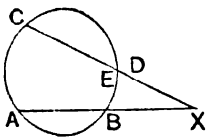
$\therefore$ AXD এবং CXB ত্রিভুজদ্বয় সদৃশকোণী,

$$\therefore \frac{AX}{CX} = \frac{XD}{XB}$$

$$\therefore AX.\ XB = CX.\ XD$$

অর্থাৎ, আয়ত AX, XD = আয়ত CX, XD।

অনুসিদ্ধান্ত 1. যদি দুইটি সীমাবদ্ধ সরলরেখা পরস্পর এরূপ বহিঃস্থভাবে ছেদ করে যে একটির অংশদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র অপরটির অংশদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের সমান হয়, তাহা হইলে সরলরেখা দুইটির প্রান্তবিন্দু চারিটি সমবৃত্ত হইবে।

[If two finite straight lines intersect externally so that the rectangle contained by the segments of the one is equal to the rectangle contained by the segments of the other, then the extremities of the straight lines are concyclic.]

মনে কর [illegible] দুইটি সীমাবদ্ধ সরলরেখা বর্ধিত হইয়া X-বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে, এবং মনে কর

AX.XB = CX.XD.

প্রমাণ করিতে হইবে, A, B, D, C সমবৃত্ত।

প্রমাণ। যদি A, B, D, C সমবৃত্ত না হয়,

মনে কর C, A, B বিন্দু দিয়া অঙ্কিত বৃত্ত CD বা বর্ধিত CD-কে E-বিন্দুতে ছেদ করিল।

তাহা হইলে AB, CE জ্যা দুইটি বর্ধিত হইয়া বৃত্তের বহিঃস্থ X-বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে বলিয়া,

AX. XB = CX. XE ; কিন্তু AX. XB = CX. XD (কল্পনা)

∴ CX. XE = CX. XD, ∴ XE = XD অর্থাৎ E-বিন্দু D-বিন্দুর সহিত মিলিত হইয়া যাইবে। অতএব যে বৃত্ত C, A, B-বিন্দু দিয়া যাইবে তাহা D-বিন্দু দিয়াও যাইবে।

দ্রষ্টব্য। ইহা উপপাদ্য 17-এর বিপরীত প্রতিজ্ঞা।

অনুসিদ্ধান্ত 2. বৃত্তের কোন জ্যা বর্ধিত হইয়া ঐ বৃত্তের কোন স্পর্শকের সহিত ছেদ করিলে, উক্ত ছেদ বিন্দু হইতে স্পর্শকের স্পর্শ বিন্দু পর্যন্ত অংশের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র বর্ধিত জ্যা-এর অংশদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের সমান।

[If a chord of a circle is produced to meet a tangent, the square on the tangent from the point of intersection is equal to the rectangle contained by the segments of the chord].

মনে কর ABC বৃত্তের AB জ্যা বর্ধিত হইয়া C বিন্দুস্থ স্পর্শকের সহিত X বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। প্রমাণ করিতে হইবে যে $CX^2 = AX. XB$.

AC, BC যুক্ত কর। ACX, BCX ত্রিভুজ দুইটি সদৃশ কোণী। কারণ ∠X সাধারণ, ∠BCX = একান্তর বৃত্তাংশস্থ ∠CAX.

$$AX : CX = CX : XB \quad \therefore \quad CX^2 = AX. XB.$$

প্রশ্ন 1. কোন বৃত্তের AB জ্যা-র অন্তর্গত P-বিন্দু দিয়া পরিধি পর্যন্ত বিস্তৃত PC সরলরেখা টান যেন $PC^2 = PA.PB$ হয়।

প্রশ্ন 2. অনুসিদ্ধান্ত 2এর বিপরীত প্রতিজ্ঞার সাধারণ নির্বচন-লিখ এবং প্রমাণ কর।

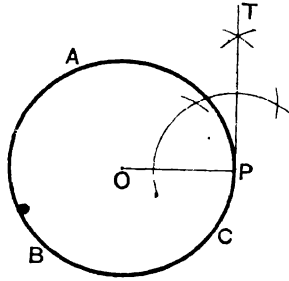
দ্বিতীয় অধ্যায়

সম্পাদ্য প্রতিজ্ঞা

স্পর্শক

সম্পাদ্য 1

পরিধিস্থ কোন নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে বৃত্তের স্পর্শক অঙ্কিত করিতে হইবে।

[To draw a tangent to a given circle from a given point on it.]

মনে কর নির্দিষ্ট ABC বৃত্তের কেন্দ্র O এবং P পরিধিস্থ একটি নির্দিষ্ট বিন্দু। P-বিন্দু হইতে ABC বৃত্তের স্পর্শক অঙ্কিত করিতে হইবে।

অঙ্কন। OP সংযুক্ত কর। P-বিন্দুতে OP-র উপর PT লম্ব টান।

এক্ষণে, PT, ABC বৃত্তের P বিন্দুস্থ স্পর্শক হইল।

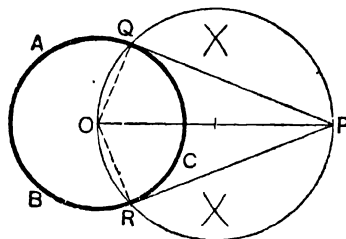
প্রমাণ। পরিধিস্থ P-বিন্দুতে PT, OP-ব্যাসার্ধের উপর লম্ব

∴ PT, ABC বৃত্তের P বিন্দুস্থ স্পর্শক।

সম্পাদ্য 2

বহিঃস্থ কোন নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে বৃত্তের স্পর্শক অঙ্কিত করিতে হইবে।

[To draw a tangent to a given circle from a given external point.]

মনে কর, ABC বৃত্তের কেন্দ্র O এবং P বহিঃস্থ একটি বিন্দু।

P-বিন্দু হইতে ABC বৃত্তের স্পর্শক অঙ্কিত করিতে হইবে।

অঙ্কন। OP সংযুক্ত কর এবং OP-কে ব্যাস লইয়া উহার উপর একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর যাহা প্রদত্ত বৃত্তটিকে Q এবং R বিন্দুতে ছেদ করিল।

PQ, PR যুক্ত কর। এখন, PQ, PR প্রত্যেকেই ABC বৃত্তের স্পর্শক হইল।

প্রমাণ। OQ, OR সংযুক্ত কর। $\angle OQP$ এবং $\angle ORP$ প্রত্যেকেই অর্ধবৃত্তস্থ কোণ বলিয়া সমকোণ। সুতরাং পরিধিস্থ Q ও R-বিন্দুতে PQ এবং PR যথাক্রমে OQ এবং OR ব্যাসার্ধের উপর লম্ব। সুতরাং PQ এবং PR প্রত্যেকেই যথাক্রমে Q এবং R বিন্দুতে ABC বৃত্তের স্পর্শক।

সংজ্ঞা। যে সরলরেখা দুইটি বৃত্তের প্রত্যেকটিকে স্পর্শ করে তাহাকে বৃত্তদ্বয়ের **সাধারণ স্পর্শক** (Common Tangent) বলে।

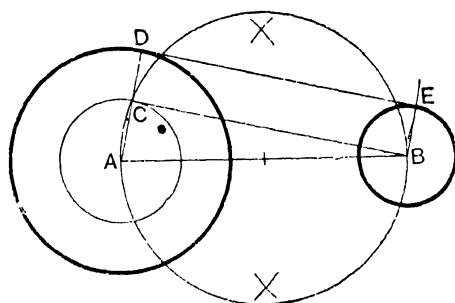
সাধারণ স্পর্শকের স্পর্শবিন্দুদ্বয় বৃত্তদ্বয়ের কেন্দ্রগামী সরলরেখার একই পার্শ্বে অবস্থিত থাকিলে উহাকে **সরল সাধারণ স্পর্শক** (Direct Common Tangent) এবং বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত থাকিলে **তির্যক্ সাধারণ স্পর্শক** (Transverse Common Tangent) বলে।

সম্পাদ্য 3

দুইটি নির্দিষ্ট বৃত্তের একটি সরল সাধারণ স্পর্শক অঙ্কিত করিতে হইবে।

[To draw a direct common tangent to two given circles.]

মনে কর, দুইটি নির্দিষ্ট বৃত্তের বৃহত্তরটির কেন্দ্র A ও ক্ষুদ্রতরটির কেন্দ্র B এবং বৃহত্তর বৃত্তের ব্যাসার্ধ a ও ক্ষুদ্রতর বৃত্তের ব্যাসার্ধ b.

এই দুইটি বৃত্তের একটি সরল সাধারণ স্পর্শক অঙ্কিত করিতে হইবে।

অঙ্কন। A-কে কেন্দ্র করিয়া $(a-b)$-র সমান ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর এবং B-বিন্দু হইতে এই বৃত্তের BC স্পর্শক অঙ্কিত কর। AC সংযুক্ত কর এবং মনে কর বর্ধিত হইয়া যেন ইহা A-বৃত্তের পরিধিকে D-বিন্দুতে ছেদ করিল। B-বিন্দু দিয়া AD-র সমান্তরাল করিয়া AD-র একই দিকে BE ব্যাসার্ধ টান। DE সংযুক্ত কর।

তাহা হইলে DE প্রদত্ত বৃত্ত দুইটির সরল সাধারণ স্পর্শক হইল।

প্রমাণ। $CD = a-(a-b) = b =$ BE, এবং CD, BE সমান্তরাল।

∴ CDEB একটি সামান্তরিক। আবার ∠ACB সমকোণ, কারণ BC একটি স্পর্শক এবং AC স্পর্শবিন্দু দিয়া অঙ্কিত ব্যাসার্ধ। ∴ ∠DCB সমকোণ;

CDEB একটি আয়তক্ষেত্র। DE, AD এবং BE ব্যাসার্দ্ধদ্বয়ের উপর লম্ব

DE প্রদত্ত বৃত্তদ্বয়ের সরল সাধারণ স্পর্শক

দ্রষ্টব্য। B-বিন্দু হইতে $(a-b)$ ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তের উপর দুইটি স্পর্শক টানা যাইতে পারে ; সুতরাং একই প্রকার অঙ্কন দ্বারা AB-র অপর পার্শ্বে আরও একটি সরল সাধারণ স্পর্শক অঙ্কিত করা যাইতে পারে।

সম্পাদ্য—স্পর্শক

সম্পাদ্য 4

দুইটি নির্দিষ্ট বৃত্তের একটি তির্যক্ সাধারণ স্পর্শক অঙ্কিত করিতে হইবে।

[To draw a transverse common tangent to two given circles.

মনে কর, দুইটি নির্দিষ্ট বৃত্তের বৃহত্তরটির কেন্দ্র A ও ক্ষুদ্রতরটির কেন্দ্র B এবং বৃহত্তর বৃত্তের ব্যাসার্ধ a এবং ক্ষুদ্রতর বৃত্তের ব্যাসার্ধ b.

এই দুইটি বৃত্তের তির্যক্ সাধারণ স্পর্শক অঙ্কিত করিতে হইবে।

অঙ্কন। A-কে কেন্দ্র করিয়া $(a+b)$-র সমান ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর এবং B-বিন্দু হইতে এই বৃত্তের উপর BC স্পর্শক অঙ্কিত কর। AC সংযুক্ত কর এবং মনে কর ইহা A-বৃত্তের পরিধিকে D-বিন্দুতে ছেদ করে। B-বিন্দু দিয়া AD-সমান্তরাল করিয়া AD-র বিপরীত দিকে BE ব্যাসার্ধ টান। DE সংযুক্ত কর।

তাহা হইলে DE প্রদত্ত বৃত্ত দুইটির তির্যক্ সাধারণ স্পর্শক হইল।

প্রমাণ। CD $=(a+b)-a$ = BE, এবং CD, BE সমান্তরাল।

∴ CDEB একটি সামান্তরিক। আবার ∠ACB সমকোণ, কারণ BC একটি স্পর্শক এবং AC স্পর্শবিন্দু দিয়া অঙ্কিত ব্যাসার্ধ। ∴ CDEB একটি আয়তক্ষেত্র।

∴ DE, AD এবং BE ব্যাসার্ধদ্বয়ের উপর লম্ব।

∴ DE প্রদত্ত বৃত্তদ্বয়ের তির্যক্ সাধারণ স্পর্শক।

দ্রষ্টব্য। B-বিন্দু হইতে $(a+b)$ ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তের উপরে দুইটি স্পর্শক টানা যাইতে পারে, সুতরাং একই প্রকার অঙ্কন দ্বারা প্রদত্ত বৃত্ত দুইটির আরও একটি তির্যক্ সাধারণ স্পর্শক অঙ্কিত করা যাইতে পারে।

তাহা হইলে দেখা যাইতেছে যে দুইটি বৃত্ত পরস্পর ছেদ না করিলে উহাদের দুইটি সবল সাধারণ স্পর্শক এবং দুইটি তির্যক্ সাধারণ স্পর্শক—মোট চারিটি সাধারণ স্পর্শক টানা যাইতে পারে।

বৃত্ত দুইটি পরস্পর বহিঃস্পর্শ করিলে উহাদের মোট তিনটি সাধারণ স্পর্শক থাকিবে, উহাদের দুইটি সরল সাধারণ স্পর্শক এবং একটি স্পর্শবিন্দুতে সাধারণ স্পর্শক হইবে।

বৃত্ত দুইটি পরস্পর দুই বিন্দুতে ছেদ করিলে উহাদের দুইটি সরল সাধারণ স্পর্শক থাকিবে ; এস্থলে তির্যক্ সাধারণ স্পর্শক থাকিবে না।

বৃত্ত দুইটি পরস্পর অন্তঃস্পর্শ করিলে উহাদের স্পর্শবিন্দুতে মাত্র একটি সাধারণ স্পর্শক হইবে।

পরস্পর স্পর্শ করে না এইরূপ বৃত্ত দুইটির একটি অপরটির মধ্যে সম্পূর্ণ ভাবে অবস্থান করিলে উহাদের কোনও সাধারণ স্পর্শক থাকিতে পারে না।

অনুশীলনী 2

1. 1·5″ ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট কোন বৃত্তের কেন্দ্র হইতে 2·5″ দূরস্থিত কোন বিন্দু হইতে ঐ বৃত্তের উপর একটি স্পর্শক অঙ্কিত কর এবং ঐ স্পর্শকের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

2. 1·8″ ও 1·2″ ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট দুইটি বৃত্তের কেন্দ্রদ্বয়ের দূরত্ব 3·8″। উহাদের সরল সাধারণ স্পর্শক দুইটি অঙ্কিত কর এবং মাপিয়া দেখাও যে উভয় স্পর্শকের দৈর্ঘ্য সমান।

3. 3 সে. মি. ও 4 সে. মি. ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট দুইটি বৃত্তের কেন্দ্রদ্বয়ের দূরত্ব 9 সে. মি. ; উহাদের তির্যক্ সাধারণ স্পর্শক দুইটি অঙ্কিত কর এবং মাপিয়া দেখাও যে উভয় স্পর্শকের দৈর্ঘ্য সমান।

4. দুইটি সমান বৃত্তের একটি সরল সাধারণ স্পর্শক অঙ্কিত কর।
Draw a direct common tangent to two equal circles.

5. দুইটি সমান বৃত্তের একটি তির্যক্ সাধারণ স্পর্শক অঙ্কিত কর।

Draw a transverse common tangent to two equal circles.

6. কোন নির্দিষ্ট বৃত্তের ভিতরে বা বাহিরে অবস্থিত কোন নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া কোন নির্দিষ্ট দৈর্ঘ্য (ব্যাসের অনধিক) পরিমিত একটি জ্যা অঙ্কিত কর। Through a given point within or without a given circle draw a chord of given length.

7. দুইটি বৃত্তের কেন্দ্রদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখা এবং উহাদের সরল সাধারণ স্পর্শকদ্বয় সমবিন্দু। The line of centres of two circles and their direct common tangents are concurrent.

8. দুইটি বৃত্তের কেন্দ্রদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখা এবং উহাদের তির্যক্ সাধারণ স্পর্শকদ্বয় সমবিন্দু। The line of centres of two circles and their transverse common tangents are concurrent.

9. দুইটি বৃত্তের উপর একই প্রকারের (সরল বা তির্যক্) সাধারণ স্পর্শকদ্বয়ের স্পর্শবিন্দুদ্বয়ের মধ্যবর্তী অংশ পরস্পর সমান। If the two direct and the two transverse common tangents are drawn to two circles, the parts of the tangents of each kind intercepted between the points of contact are equal.

বৃত্তের অন্তর্লিখিত ও পরিলিখিত ঋজুরেখ ক্ষেত্র

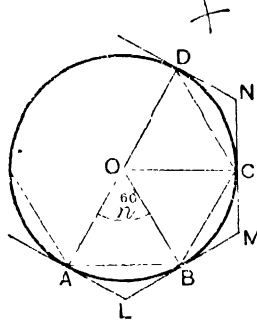
সম্পাদ্য 5

কোন নির্দিষ্ট বৃত্তে একটি সুষম বহুভুজ (1) অন্তর্লিখিত ও (2) পরিলিখিত করিতে হইবে।

[To draw a regular polygon (1) in, (2) about a given circle.]

মনে কর ABC নির্দিষ্ট বৃত্ত যাহার কেন্দ্র O.

এই বৃত্তে n-সংখ্যক বাহুবিশিষ্ট একটি সুষম বহুভুজ (1) অন্তর্লিখিত, (2) পরিলিখিত করিতে হইবে

বিশ্লেষণ। মনে কর ABCD সুষম বহুভুজটি প্রদত্ত বৃত্তে অন্তর্লিখিত করা হইয়াছে এবং বৃত্তের কেন্দ্র O বিন্দুর সহিত A, B, C,...যুক্ত করা হইয়াছে। এখন AB, BC, CD...ইত্যাদি বাহুগুলি প্রদত্ত বৃত্তের জ্যা।

যেহেতু AB = BC = CD = ··· ; সুতরাং ∠AOB = ∠BOC = ∠COD = ···।
অর্থাৎ বহুভুজের প্রত্যেক বাহু বৃত্তের কেন্দ্র O-বিন্দুতে সমান কোণ উৎপন্ন করে।
কিন্তু O বিন্দুস্থিত সমগ্র কোণের পরিমাণ = 360°.

∴ সুষম বহুভুজের বাহুসংখ্যা n হইলে, O-বিন্দুতে প্রত্যেক কোণের পরিমাণ হইবে $\frac{360°}{n}$

অঙ্কন। ABC বৃত্তের যে কোন ব্যাসার্ধ OA অঙ্কিত কর। O বিন্দুতে আর একটি ব্যাসার্ধ OB এরূপভাবে অঙ্কিত কর যেন $\angle AOB = \frac{360°}{n}$ হয়। AB যুক্ত কর। AB জ্যা-এর সমান করিয়া BC, CD ইত্যাদি জ্যা-সমূহ পর পর অঙ্কিত করিয়া যাও।

(1) তাহা হইলে ABCD···বহুভুজটিই ...ক বাহু বিশিষ্ট অন্তর্লিখিত সুষম বহুভুজ হইবে।

(2) A, B, C, D···বিন্দুগুলির প্রত্যেক বিন্দুতে প্রদত্ত বৃত্তের স্পর্শক অঙ্কিত করিয়া যাও এবং মনে কর এই স্পর্শকগুলি L, M, N···ইত্যাদি বিন্দুতে ছেদ করিল তাহা হইলে LMN···বহুভুজই n-সংখ্যক বাহুবিশিষ্ট পরিলিখিত সুষম বহুভুজ হইবে।

প্রমাণ। (1) AB, BC, CD···জ্যা সমূহ পরস্পর সমান।

$\therefore$ $\angle AOB = \angle BOC = \angle COD = \cdots$

আবার $\angle OAB = \angle OBA$; $\angle OBC = \angle OCB$; $\angle OCD = \angle ODC \cdots$

সুতরাং $\angle OAB = \angle OBA = \angle OBC = \angle OCB = \angle OCD = \cdots$

অতএব, $\angle ABC = \angle BCD = \cdots$

অতএব ABCD··· নির্ণেয় n-সংখ্যক বাহুবিশিষ্ট অন্তর্লিখিত সুষম বহুভুজ।

(2) $\angle AOB = \angle BOC = \angle COD = \cdots$

$\therefore$ $\angle AOB$-এর সম্পূরক $\angle ALB = \angle BOC$-এর সম্পূরক $\angle BMC$.

$= \angle COD$-এর সম্পূরক $\angle CND$.

LA স্পর্শক = LB স্পর্শক ; MB স্পর্শক = MC স্পর্শক,

$\because$ $\angle LAB = \angle LBA$; $\angle MBC = \angle MCB$

কিন্তু $\angle ALB = \angle BMC$,

$\therefore$ $\angle LAB = \angle LBA = \angle MBC = \angle MCB$.

এখন ALB, BMC ত্রিভুজে $\angle LAB = \angle MCB$, $\angle ALB = \angle BMC$,

$AB = BC$, $\therefore$ $LB = MB$। এইরূপে প্রমাণ করা যায় $MC = NC = ND$.

$\therefore$ $LA = LB = MB = MC = NC = ND$.

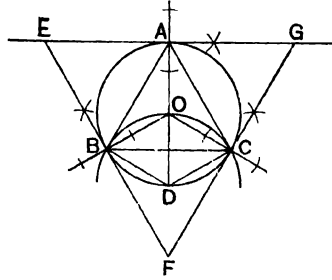
সুতরাং $LM = MN = \cdots$

অতএব LMN··· n-সংখ্যক বাহুবিশিষ্ট নির্ণেয় পরিলিখিত সুষম বহুভুজ।

দ্রষ্টব্য। সুষম ষড্‌ভুজ অঙ্কিত করিতে হইলে কেন্দ্রস্থ প্রত্যেক কোণের পরিমাণ হইবে $\frac{360^\circ}{6}$ বা 60° ; সুষম অষ্টভুজ অঙ্কিত করিতে হইলে কেন্দ্রস্থ প্রত্যেক কোণের পরিমাণ হইবে $\frac{360^\circ}{8}$ বা 45° ; সুষম দ্বাদশভুজ অঙ্কিত করিতে কেন্দ্রস্থ প্রত্যেক কোণের পরিমাণ হইবে $\frac{360^\circ}{12}$ বা 30°। $60^\circ, 45^\circ, 30^\circ$ এই সমস্ত কোণ অঙ্কন মাপনী ও কম্পাস দ্বারা সম্ভব; কিন্তু পঞ্চভুজ এবং দশভুজ অঙ্কিত করিতে হইলে কেন্দ্রে যে 72° ও 36° কোণ অঙ্কিত করিতে হইবে উহার অঙ্কন প্রণালী পরে প্রদর্শিত হইবে। জ্যামিতিক প্রণালীতে কোণ অঙ্কন অসম্ভব হইলে কোণচক্রের সাহায্য লইতে হইবে।

সম্পাদ্য 6

একটি নির্দিষ্ট বৃত্তের (i) অন্তর্লিখিত (ii) পরিলিখিত, একটি সমবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে।

[To draw an equilateral triangle (i) in, (ii) about a given circle.]

মনে কর, O বৃত্তের কেন্দ্র। এই বৃত্তের (i) অন্তর্লিখিত, (ii) পরিলিখিত সমবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে।

অঙ্কন। AOD যে কোন ব্যাস টান। D-কে কেন্দ্র করিয়া DO ব্যাসার্ধ লইয়া একটি চাপ অঙ্কিত কর যাহা প্রদত্ত বৃত্তের পরিধিকে B এবং C বিন্দুতে ছেদ করে।

(i) AB, BC, AC যুক্ত কর। তাহা হইলে ABC বৃত্তের অন্তর্লিখিত সমবাহু ত্রিভুজ হইল।

প্রমাণ। OC, CD, DB, BO যুক্ত কর।

অঙ্কন অনুসারে, OCD এবং ODB ত্রিভুজ দুইটি সমবাহু ;

$\therefore \quad \angle BOC = 120^\circ$

$\therefore \quad \angle BAC = 60^\circ$

আবার, $\angle COD = 60^\circ$, $\therefore \quad \angle COA = 120^\circ$

$\therefore \quad \angle ABC = 60^\circ$.

$\therefore$ অবশিষ্ট $\angle ACB = 60^\circ$

$\therefore \quad \angle BAC = \angle ACB = \angle CBA = 60^\circ$

সুতরাং ABC ত্রিভুজটি সমবাহু।

(ii) A, B, C বিন্দুতে বৃত্তের তিনটি স্পর্শক অঙ্কিত কর। এই স্পর্শক তিনটি বর্ধিত করা হইলে মনে কর, EFG ত্রিভুজ উৎপন্ন হইল।

তাহা হইলে EFG বৃত্তের পরিলিখিত সমবাহু ত্রিভুজ।

প্রমাণ। $\angle EAB = \angle ACB$ (একান্তর বৃত্তাংশস্থ বলিয়া)

$= 60°$

অনুরূপভাবে, $\angle ABE = \angle ACB$ (একান্তর বৃত্তাংশস্থ বলিয়া)

$= 60°$

$\therefore \quad \angle AEB = 60°$

অনুরূপভাবে, $\angle AGC = 60°$, $\angle BFC = 60°$

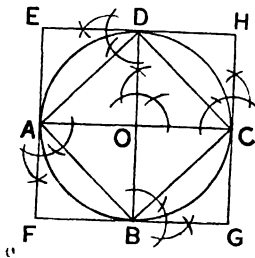
অর্থাৎ $\angle E = \angle F = \angle G = 60°$

এবং EF, FG, GE বৃত্তের স্পর্শক ;

সুতরাং EFG বৃত্তের পরিলিখিত সমবাহু ত্রিভুজ।

সম্পাদ্য 7

বৃত্তের (i) অন্তর্লিখিত এবং (ii) পরিলিখিত একটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত কর।

[(i) In and (ii) about a circle describe a square.]

মনে কর, প্রদত্ত বৃত্তের কেন্দ্র O।

(i) ঐ বৃত্তের অন্তর্লিখিত একটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত করিতে হইবে।

অঙ্কন। AC, BD, দুইটি পরস্পর লম্ব ব্যাস আঁক।

AB, BC, CD, DA যুক্ত কর।

তাহা হইলে ABCD অভীষ্ট বর্গক্ষেত্র।

প্রমাণ। $\triangle AOD \equiv \triangle COD$, $\therefore$ $AD = DC$

$\triangle AOD \equiv \triangle AOB$, $\therefore$ $AD = AB$

তদ্রূপ, $AB = BC$

$\therefore$ $AB = BC = CD = DA$.

এবং অর্ধবৃত্তস্থ কোণ বলিয়া, $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D =$ সমকোণ।

সুতরাং ABCD বৃত্তের অন্তর্লিখিত অভীষ্ট বর্গক্ষেত্র।

(ii) A, B, C, D বিন্দুতে বৃত্তের স্পর্শক আঁক যাহারা পরস্পর মিলিত হইয়া EFGH চতুর্ভুজ উৎপন্ন করে।

তাহা হইলে EFGH বৃত্তের পরিলিখিত অভীষ্ট বর্গক্ষেত্র।

প্রমাণ। OAED চতুর্ভুজে, $\angle O = \angle A = \angle D =$ সমকোণ

$\therefore$ $\angle E$ সমকোণ।

তদ্রূপ, $\angle F = \angle G = \angle H =$ সমকোণ

আবার, AEHC আয়তক্ষেত্রের $EH = AC =$ ব্যাস.

তদ্রূপ, EF, FG, GH এর প্রত্যেকে ব্যাসের সমান।

সুতরাং EFGH চতুর্ভুজের প্রত্যেক বাহু সমান এবং প্রত্যেক কোণ সমকোণ।

সুতরাং EFGH বৃত্তের পরিলিখিত বর্গক্ষেত্র।

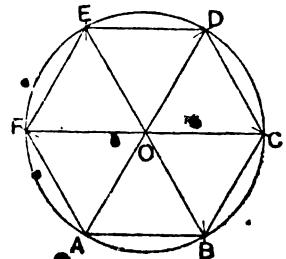
সম্পাদ্য 8

কোন নির্দিষ্ট বৃত্তে একটি অন্তর্লিখিত সুষম ষড়্ভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে।

[To inscribe a regular hexagon in a given circle.]

মনে কর নির্দিষ্ট বৃত্তের কেন্দ্র O.

অঙ্কন। পরিধির উপর যে কোন A-বিন্দু লও এবং AO-ব্যাসার্ধ লইয়া A-বিন্দু হইতে আরম্ভ করিয়া পরিধির উপর পর পর B, C, D, E, F বিন্দুসমূহ স্থাপন কর।

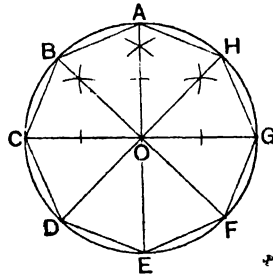
AB, BC, CD, DE, EF, FA সংযুক্ত কর। তাহা হইলে ABCDEF প্রদত্ত বৃত্তের অন্তর্লিখিত ষড়্ভুজ হইবে।

প্রমাণ। $OA = OB = AB$; $\therefore \quad \angle OAB = \angle OBA = 60^\circ = \angle OBC$
$= \angle OCB = \angle OCD = \cdots$

$\therefore \quad \angle ABC = 120^\circ = \angle BCD = \angle CDE \cdots$

এবং অঙ্কন অনুসারে $AB = BC = CD = DE = EF = FA$.

দ্রষ্টব্য। A, B, C, D, E, F বিন্দুতে প্রদত্ত বৃত্তের স্পর্শক অঙ্কিত করিলে, স্পর্শকসমূহ দ্বারা উৎপন্ন ষড়্‌ভুজই পরিলিখিত সুষম ষড়্‌ভুজ হইবে।

সম্পাদ্য 9

কোন নির্দিষ্ট বৃত্তের অন্তর্লিখিত একটি সুষম অষ্টভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে।
[To inscribe a regular hexagon in a given circle.]

মনে কর O বৃত্তের কেন্দ্র।

অঙ্কন। যে কোন AE এবং CG দুইটি ব্যাস পরস্পর লম্বভাবে অঙ্কিত কর। AOC, AOG সন্নিহিত কোণদ্বয়কে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়া দ্বিখণ্ডকদ্বয়কে উভয়দিকে পরিধি পর্যন্ত বর্ধিত কর। মনে কর ইহারা পরিধিকে যথাক্রমে B, F এবং H, D বিন্দুতে ছেদ করিল।

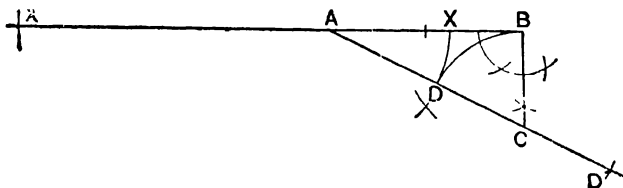
AB, BC, CD, DE, EF, FG, GH এবং HA সংযুক্ত কর। তাহা হইলে ABCDEFGH প্রদত্ত বৃত্তের অন্তর্লিখিত সুষম অষ্টভুজ হইল।

প্রমাণ। অঙ্কন অনুসারে O-বিন্দুস্থ প্রত্যেক কোণ 45°। অবশিষ্ট সম্পাদ্য 5-এর প্রমাণের ন্যায়।

দ্রষ্টব্য। A, B, C, D, E, F, G, H বিন্দুতে স্পর্শক অঙ্কিত করিলে স্পর্শক সমূহদ্বারা উৎপন্ন ক্ষেত্রটি প্রদত্ত বৃত্তের পরিলিখিত সুষম অষ্টভুজ হইবে।

সম্পাদ্য 10

কোন নির্দিষ্ট সরলরেখাকে এরূপভাবে (1) অন্তর্বিভক্ত এবং (2) বহির্বিভক্ত করিতে হইবে যেন সমগ্র সরলরেখা ও একাংশের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র অপরাংশের উপরিস্থিত বর্গক্ষেত্রের সমান হয়।

[To divide a straight line (i) internally and (ii) externally, so that the rectangle contained by the whole line and one part may be equal to the square on the other part.]

মনে কর AB একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা।

(i) ইহাকে X-বিন্দুতে অন্তর্বিভক্ত করিতে হইবে যেন $AB.BX = AX^2$ হয়।

অঙ্কন। B-বিন্দু হইতে AB-র উপর BC লম্ব টান এবং $BC = \frac{1}{2}AB$ লও।

AC যোগ কর। CB-র সমান করিয়া CA হইতে CD কাট। A-কে কেন্দ্র করিয়া AD ব্যাসার্ধ লইয়া চাপ আঁক এবং AB-কে X-বিন্দুতে ছেদ করাও।

তাহা হইলে, AB সরলরেখা অভীষ্টরূপে X-বিন্দুতে অন্তর্বিভক্ত হইল।

প্রমাণ। $\angle ABC$ সমকোণ, $\therefore AB^2 = AC^2 - BC^2$

$= (AC - BC)(AC + BC) = AX(AX + AB) = AX^2 + AX.AB$

$\therefore AB^2 - AX.AB = AX^2$ বা $AB(AB - AX) = AX^2$ বা $AB.BX = AX^2$.

(ii) AB-কে X′ বিন্দুতে বহির্বিভক্ত করিতে হইবে যেন $AB.BX' = AX'^2$ হয়।

অঙ্কন। B-বিন্দু হইতে AB-র উপর BC লম্ব টান এবং $BC = \frac{1}{2} AB$ লও। AC যুক্ত কর এবং বর্ধিত AC হইতে CB-র সমান করিয়া CD′ কাট। A-কে কেন্দ্র করিয়া AD′ ব্যাসার্ধ লইয়া চাপ আঁক যাহা বর্ধিত BA-কে X′-বিন্দুতে ছেদ করে।

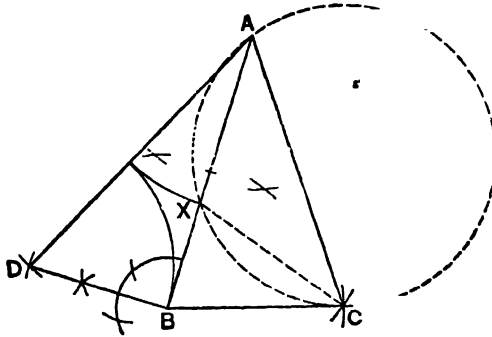
তাহা হইলে AB সরলরেখা X′-বিন্দুতে অভীষ্টরূপে বহির্বিভক্ত হইল।

প্রমাণ। $AB^2 = AC^2 - BC^2 = (AC + BC)(AC - BC)$
$= AX'(AX' - AB) = AX'^2 - AX'.AB$
$\therefore$ $AB^2 + AX'.AB = AX'^2$ বা $AB(AB + AX') = AX'^2$ বা $AB.BX' = AX'^2$.

মাধ্যমিক ছেদ (Medial Section)—কোন সরলরেখা যদি এরূপ দুই অংশে বিভক্ত হয় যে এক অংশ এবং সমগ্র রেখার অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র অপর অংশের উপরিস্থিত বর্গক্ষেত্রের সমান হয়, তাহা হইলে ঐ সরলরেখাকে মাধ্যমিক ছেদে বিভক্ত বলা হয় এবং যে বিন্দুতে বিভক্ত হয় তাহাকে **মাধ্যমিক ছেদবিন্দু** (Point of Medial Section) বলা হয়।

সম্পাদ্য 11

এমন একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে যাহার ভূমিস্থ প্রত্যেক কোণ শিরঃকোণের দ্বিগুণ।

[To draw an isosceles triangle having each of the angles at the base double of the vertical angle.]

AB একটি সরলরেখা লইয়া উহাকে X-বিন্দুতে মাধ্যমিক ছেদে বিভক্ত কর যেন $AB.BX = AX^2$ হয়। X ও B কে কেন্দ্র করিয়া AX ব্যাসার্ধ লইয়া দুইটি চাপ আঁক যেন উহারা পরস্পর C-বিন্দুতে ছেদ করে। AC, BC যুক্ত কর।

তাহা হইলে ABC অভীষ্ট সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ হইল।

প্রমাণ। XC যুক্ত কর এবং A, X, C বিন্দু দিয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর।

$AB.BX = AX^2 = BC^2$, সুতরাং BC, AXC বৃত্তের স্পর্শক।

$\therefore$ $\angle BCX = \angle A$ (একান্তর বৃত্তাংশে)। $\angle ACX = \angle A$ ($\because$ $XA = XC$)

অতএব, $\angle ACB = 2\angle A$ ....(1)

$BC = CX$, $\therefore$ $\angle B = \angle BXC = \angle A + \angle ACX = 2\angle A$ ....(2)

(1) ও (2) হইতে $\angle B = \angle C = 2\angle A$.

অতএব ABC অভীষ্ট সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ।

দ্রষ্টব্য। উক্ত সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের $\angle A + \angle B + \angle C = \angle A + 2\angle A + 2\angle A = 5\angle A = 180°$. $\therefore$ $\angle A = 36°$, $\angle B = 72°$, $\angle C = 72°$.

অনুসিদ্ধান্ত 1. কোন নির্দিষ্ট ভূমির উপর এমন একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে যাহার ভূমিস্থ প্রত্যেক কোণ শিরঃকোণের দ্বিগুণ।

[On a given base, to draw an isosceles triangle having each of the base angles double of the vertical angle.]

অনুসিদ্ধান্ত 2. একটি সমকোণের পঞ্চমাংশ নির্ণয় করিতে হইবে।

[To find the fifth part of a right angle.]

সম্পাদ্য 12

কোন নির্দিষ্ট বৃত্তের (1) অন্তর্লিখিত ও (2) পরিলিখিত সুষম পঞ্চভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে।

[To construct a regular pentagon (i) in and (ii) about a circle.]

মনে কর নির্দিষ্ট বৃত্তটির কেন্দ্র O.

এই বৃত্তের (1) অন্তর্লিখিত ও (2) পরিলিখিত সুষম পঞ্চভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে।

অঙ্কন। OA যে কোন ব্যাসার্ধ টান। OB আর একটি ব্যাসার্ধ টান যেন $\angle AOB = 72°$ হয় (পূর্ব সম্পাদ্য অনুসারে) ; এইরূপে OC, OD এবং OE তিনটি ব্যাসার্ধ টান যেন $\angle BOC$, $\angle COD$, $\angle DOE$-এর প্রত্যেকটি 72° হয়।

(1) AB, BC, CD, DE এবং EA যুক্ত কর।

তাহা হইলে ABCDE অভীষ্ট অন্তর্লিখিত পঞ্চভুজ।

প্রমাণ। $\angle EOA = 360° - 4 \times 72° = 72°$.

এক্ষণে, কেন্দ্রস্থ পাঁচটি কোণ পরস্পর সমান,

অতএব উহাদের সম্মুখীন পাঁচটি জ্যাও পরস্পর সমান,

অর্থাৎ $AB = BC = CD = DE = EA$.

আবার, চাপ AEDC = চাপ EDCB, $\therefore \quad \angle B = \angle A$

তদ্রূপ, $\angle C$, $\angle D$, $\angle E$ ইহাদের প্রত্যেকটিই $= \angle A$.

অতএব, ABCDE অভীষ্ট সুষম পঞ্চভুজ।

(2) A, B, C, D, E, বিন্দু দিয়া বৃত্তের স্পর্শক টান।

মনে কর এই স্পর্শকগুলি P, Q, R, S, T বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করিল

তাহা হইলে PQRST বৃত্তের পরিলিখিত সুষম পঞ্চভুজ।

প্রমাণ। OAPB চতুর্ভুজের $\angle A$, $\angle B$ প্রত্যেকেই সমকোণ,

সুতরাং $\angle P$, $\angle AOB$ অর্থাৎ 72° কোণের সম্পূরক।

তদ্রূপ $\angle Q$, $\angle R$, $\angle S$, $\angle T$-এর প্রত্যেকটিই 72° কোণের সম্পূরক

তাহা হইলে, $\angle P = \angle Q = \angle R = \angle S = \angle T \cdots\cdots(1)$

আবার, P-বিন্দু হইতে PA, PB স্পর্শক,

$\therefore \quad PA = PB$; সেইরূপ, $QB = QC$.

PAB, QBC দুইটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের $\angle P = \angle Q$.

$$\therefore \quad \angle A = \angle B \text{ এবং } \angle B = \angle C$$

এক্ষণে, PAB, QBC ত্রিভুজদ্বয়ে

$$\angle P = \angle Q, \quad \angle PAB = \angle QBC, \ AB = BC$$

$\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম। $\therefore$ $BP = QC$

তদ্রূপ $QC = RD = RC$

$\therefore$ $PB = BQ = QC = CR$

$\therefore$ $PB + BQ = QC + CR$, অর্থাৎ $PQ = QR$

তদ্রূপ, $QR = RS = ST = TP$.

অতএব, PQRST বৃত্তের পরিলিখিত অভীষ্ট সুষম পঞ্চভুজ।

অনুশীলনী 3

1. 3″ দীর্ঘ একটি সরলরেখার অন্তঃস্থ মাধ্যমিক ছেদবিন্দু নির্ণয় কর।

2. 2″ দীর্ঘ একটি সরলরেখার বহিঃস্থ মাধ্যমিক ছেদবিন্দু নির্ণয় কর।

3. AB সরলরেখার মাধ্যমিক ছেদবিন্দু X ; যদি $AY = BX$ হয়, প্রমাণ কর যে AX সরলরেখার মাধ্যমিক ছেদবিন্দু Y.

4. AB সরলরেখার মাধ্যমিক ছেদবিন্দু X ; প্রমাণ কর যে $AB^2 + BX^2 = 3AX^2$.

5. AB সরলরেখার মাধ্যমিক ছেদবিন্দু X ; প্রমাণ কর যে

$(AX + XB)\ (AX - XB) = AX.XB$.

6. কোন বৃত্তের অন্তর্লিখিত একটি সুষম দশভুজ অঙ্কিত কর।

Inscribe a regular decagon in a given circle.

7. এমন একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ আঙ্কিত কর যাহার প্রত্যেকটি ভূমিসংলগ্ন কোণ শিরঃকোণের এক তৃতীয়াংশ।

Construct an isosceles triangle having each of the angles at the base one-third of the vertical angle.

8. ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের $\angle B = \angle C = 2\angle A$; প্রমাণ কর যে,

$2BC = AB(\sqrt{5} - 1)$ এবং $2AB = BC(\sqrt{5} + 1)$.

9. সম্পাদ্য 11-এর চিত্রে প্রমাণ কর যে AXC বৃত্ত = ABG বৃত্ত।

10. সম্পাদ্য 11-এর চিত্রে প্রমাণ কর যে AX, AXC বৃত্তের অন্তর্লিখিত সুষম পঞ্চভুজের বাহু।

11. 5 সে. মি. ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর এবং ইহাতে একটি সুষম অষ্টভুজ অন্তর্লিখিত কর।

12. কোন নির্দিষ্ট বৃত্তের পরিলিখিত একটি রম্বস অঙ্কিত কর।

13. কোন নির্দিষ্ট বর্গক্ষেত্রে ক্ষুদ্রতম ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি বর্গক্ষেত্র অন্তর্লিখিত কর।

In a given square inscribe a square of minimum area.

14. মাত্র মাপনী ও কম্পাসের সাহায্যে 2″ ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তে সুষম (1) ষড়্ভুজ (2) অষ্টভুজ (3) দ্বাদশভুজ অন্তর্লিখিত ও পরিলিখিত কর।

15. কোণচক্রের (Protractor) সাহায্যে 4 সে. মি. ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তে সুষম (1) পঞ্চভুজ (2) নবভুজ (3) দশভুজ অন্তর্লিখিত ও পরিলিখিত কর।

16. কোন বৃত্তের অন্তর্লিখিত ষড়্ভুজের ক্ষেত্রফল ঐ বৃত্তের পরিলিখিত ষড়্ভুজের ক্ষেত্রফলের তিন-চতুর্থাংশ।

17. কোন বৃত্তে একটি বর্গক্ষেত্র এবং একটি সমবাহু ত্রিভুজ অন্তর্লিখিত করা হইল। বর্গক্ষেত্র এবং সমবাহু ত্রিভুজের বাহু যথাক্রমে p ও q হইলে, প্রমাণ কর, $3p^2 = 2q^2$.

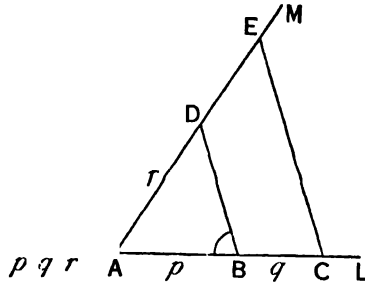
18. কোন বৃত্তে একটি সমবাহু ত্রিভুজ এবং একটি সুষম ষড়্ভুজ অন্তর্লিখিত আছে। সমবাহু ত্রিভুজের এবং সুষম ষড়্ভুজের বাহু যথাক্রমে p এবং q হইলে প্রমাণ কর :

(1) সমবাহু ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল = সুষম ষড়্ভুজের ক্ষেত্রফলের অর্ধ।

(2) $p^2 = 3q$

সম্পাদ্য 13

তিনটি সরলরেখা দেওয়া আছে ; উহাদের চতুর্থ সমানুপাতী নির্ণয় কর।

[Find the fourth proportional to three given straight lines.]

p, q, r তিনটি সরলরেখা দেওয়া আছে ; উহাদের চতুর্থ সমানুপাতী নির্ণয় করিতে হইবে।

অঙ্কন। LAM যে কোন একটি কোণ আঁক। AL হইতে p-র সমান AB, এবং BL হইতে q-র সমান BC কাট। AM হইতে r-এর সমান AD কাট। BD যোগ কর এবং BD-র সমান্তরাল CE টান যেন উহা AMকে E-বিন্দুতে ছেদ করে।

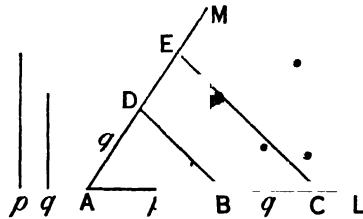
তাহা হইলে DE নির্ণেয় চতুর্থ সমানুপাতী।

প্রমাণ। ACE ত্রিভুজে BD $\parallel$ CE. $\therefore$ AB : BC = AD : DE

অর্থাৎ, $p : q = r$: DE.

সম্পাদ্য 14

দুইটি সরলরেখা দেওয়া আছে ; উহাদের তৃতীয় সমানুপাতী নির্ণয় কর।

[Find the third proportional to two given straight lines.]

p, p দুইটি সরলরেখা দেওয়া ; উহাদের তৃতীয় সমানুপাতী নির্ণয় করিতে হইবে।

অঙ্কন। LAM একটি কোণ আঁক। AL হইতে p-র সমান AB, এবং BL হইতে q-এর সমান BC লও। AM হইতে q-র সমান AD লও। BD যোগ কর এবং BD || CE আঁক ; CE যেন AM-কে E-বিন্দুতে ছেদ করে।

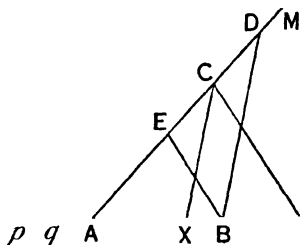
তাহা হইলে DE নির্ণেয় তৃতীয় সমানুপাতী।

প্রমাণ। ACE ত্রিভুজে, BD || CE. AB : BC = AD : DE

অর্থাৎ, $p : q = q$: DE.

সম্পাদ্য 15

একটি নির্দিষ্ট সরলরেখাকে কোন নির্দিষ্ট অনুপাতে (1) অন্তঃস্থ এবং (2) বহিঃস্থ-ভাবে বিভক্ত কর।

[Divide a given straight line (i) internally and (ii) externally in a given ratio.]

AB একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা ; উহাকে $p : q$ অনুপাতে (i) অন্তঃস্থ ও (ii) বহিঃস্থভাবে বিভক্ত করিতে হইবে।

অঙ্কন। AB-র সহিত যে কোন কোণ করিয়া AM আঁক ; AM হইতে p-এর সমান করিয়া AC লও। CM ও CA হইতে q-এর সমান করিয়া যথাক্রমে CD ও CE লও। BD ও BE যোগ কর। BD || CX এবং BE || CY আঁক ; CX যেন AB-কে এবং CY যেন বর্ধিত AB-কে যথাক্রমে X এবং Y-বিন্দুতে ছেদ করে।

তাহা হইলে AB সরলরেখা X-বিন্দুতে অন্তঃস্থভাবে এবং Y-বিন্দুতে বহিঃস্থভাবে $p : q$ অনুপাতে বিভক্ত হইল।

প্রমাণ। ABD ত্রিভুজের CX ∥ DB ;

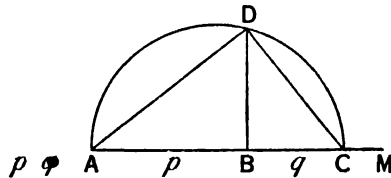
∴ AX : XB = AC : CD = $p : q$

আবার, ABE ত্রিভুজের CY ∥ EB,

∴ AY : YB = AC : CE = $p : q$

সম্পাদ্য 16

দুইটি নির্দিষ্ট সরলরেখার মধ্য-সমানুপাতী নির্ণয় করিতে হইবে।

[To find the mean proportional between two given straight lines.]

মনে কর p ও q দুইটি সরলরেখা।

উহাদের মধ্য-সমানুপাতী নির্ণয় করিতে হইবে।

অঙ্কন। যে কোন সরলরেখা AM লও। উহা হইতে AB = p এবং BC = q লও। এখন, AC-কে ব্যাস লইয়া একটি অর্ধবৃত্ত আঁক এবং AB-র উপর BD লম্ব টান যেন উহা অর্ধবৃত্তকে D-বিন্দুতে ছেদ করে।

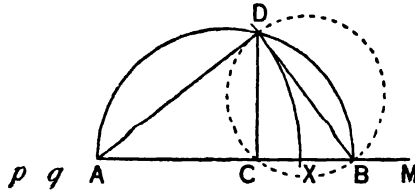
তাহা হইলে BD নির্ণেয় মধ্য-সমানুপাতী।

প্রমাণ। AD, DC যোগ কর। অর্ধবৃত্তস্থ কোণ বলিয়া ADC সমকোণ।

এখন, △ABD এবং △DBC সদৃশ ;

∴ AB : BD = BD : BC অর্থাৎ p : BD = BD :

সুতরাং p ও q-র মধ্য-সমানুপাতী BD।

দ্বিতীয় প্রণালী। মনে কর p ও q দুইটি সরলরেখা। উহাদের মধ্য-সমানুপাতী নির্ণয় করিতে হইবে

অঙ্কন। AM একটি সরলরেখা লও। AM হইতে p-এর সমান AB এবং q-এর সমান AC লও। ABকে ব্যাস লইয়া একটি অর্ধবৃত্ত অঙ্কিত কর এবং C হইতে AB-র উপর CD লম্ব টান যেন উহা অর্ধবৃত্তকে D বিন্দুতে ছেদ করে। AD যোগ কর এবং AB হইতে AD-র সমান AX কাট।

তাহা হইলে AD বা AX অভীষ্ট মধ্য-সমানুপাতী।

প্রমাণ। BD যোগ কর এবং BCD দিয়া একটি বৃত্ত আঁক।

BCD বৃত্তের ব্যাস BD এবং $\angle ADB$ অর্ধবৃত্তস্থ কোণ বলিয়া সমকোণ ;

অর্থাৎ, AD, DB-র উপর লম্ব ;

সুতরাং AD, BCD বৃত্তের D-বিন্দুস্থ স্পর্শক। $\therefore$ $AB.AC = AD^2 = AX^2$

জ্যামিতিক প্রণালীতে বর্গমূল নির্ণয়—

মনে কর $\sqrt{15}$ এর মান নির্ণয় করিতে হইবে। $15 = 5 \times 3$, এখন, $AB = 5$-একক এবং $AC = 3$-একক লইয়া পূর্ব সম্পাদ্যের ন্যায় AB ও AC-র মধ্য-সমানুপাতী AX নির্ণয় কর। এখন AX-এর দৈর্ঘ্য দ্বারা 15-এর বর্গমূল সূচিত হইবে, কারণ

$$AB.AC = AX^2 \text{ অর্থাৎ, } AX = \sqrt{AB.AC} = \sqrt{5.3} = \sqrt{15}.$$

দ্রষ্টব্য। যে সংখ্যার বর্গমূল নির্ণয় করিতে হইবে, সেই সংখ্যাটি মৌলিক সংখ্যা হইলে AC-র দৈর্ঘ্য 1 একক লইতে হইবে এবং কৃত্রিম সংখ্যা হইলে উহাকে

সুবিধাজনক যে কোন দুইটি উৎপাদকে পরিণত করিয়া AB ও ACকে তৎপরিমিত এককের সমান লইবে। যথা, $20=5\times4=10\times2=20\times1$; সুতরাং এস্থলে AB, AC-কে যথাক্রমে (5, 4), (10, 2) অথবা (20, 1) লওয়া যাইতে পারে।

যে সংখ্যার বর্গমূল নির্ণয় করিবে, তাহার উৎপাদক দুইটি কাছাকাছি হইলে সুবিধা হয়। যেমন, $19=5\times3{\cdot}8$. ছককাগজের বড় বর্গের (অর্থাৎ যাহার বাহু দশ ভাগে বিভক্ত) বাহুকে একক লইয়া চিত্র অঙ্কিত করিলে দশমিকের প্রথম স্থান পর্যন্ত শুদ্ধ বর্গমূল পাওয়া যায়।

প্রশ্ন। ছক-কাগজের সাহায্যে 7, 11, 17, 23 এর বর্গমূল এক দশমিক স্থান পর্যন্ত নির্ণয় কর।

সম্পাদ্য 17

একটি আয়তক্ষেত্রের সমান একটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত করিতে হইবে।

[To construct a square equal in area to a given rectangle.]

মনে কর, ABCD একটি নির্দিষ্ট আয়তক্ষেত্র।

উক্ত আয়তক্ষেত্রের সমান একটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত করিতে হইবে।

অঙ্কন। AD-কে E পর্যন্ত বর্ধিত কর যেন DE = DC হয়। AE কে ব্যাস লইয়া উহার উপর অর্ধবৃত্ত অঙ্কিত কর। CD-কে বর্ধিত করিয়া অর্ধ-পরিধির P-বিন্দুতে মিলিত কর।

PD বাহুর উপর PDRQ বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত কর।

এখন, PDRQ অভীষ্ট বর্গক্ষেত্র হইল।

প্রমাণ। AE-র মধ্যবিন্দু F ও P যুক্ত কর।

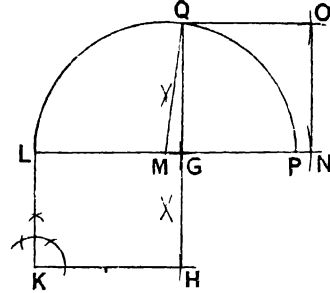
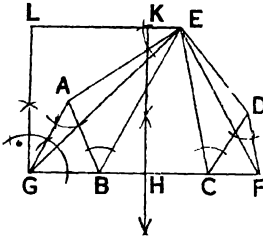
আয়ত AC $= AD.\ DC = AD.DE = (AF + FD)\ (FE - FD)$

$= (AF + FD)\ (AF - FD) = AF^2 - FD^2$

$= FP^2 - FD^2 = PD^2$ $(\because\ \angle PDF =$ সমকোণ $)$

সম্পাদ্য 18

একটি বহুভুজের সমান একটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত করিতে হইবে।

[To draw a square equal in area to a given polygon.]

মনে কর ABCDE একটি পঞ্চভুজ।

ABCDE পঞ্চভুজের সমান একটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত করিতে হইবে।

অঙ্কন। ABCDE পঞ্চভুজের সমান EGF ত্রিভুজ অঙ্কিত কর।

EGF ত্রিভুজের সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট GHKL আয়তক্ষেত্র অঙ্কিত কর।

এখন GHKL আয়তক্ষেত্রটিকে অন্যত্র স্থাপন করিয়া লও (অঙ্কনের সুবিধার জন্য)

LG-কে P পর্যন্ত বর্ধিত কর যেন GP = GH হয়।

LP-কে ব্যাস লইয়া উহার উপর একটি অর্ধবৃত্ত আঁক। HG-কে বর্ধিত করিয়া অর্ধ-পরিধির Q বিন্দুতে মিলিত কর।

এখন, GQ বাহুর উপর GQON বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত কর।

তাহা হইলে, GQON অভীষ্ট বর্গক্ষেত্র হইল।

প্রমাণ। LPর মধ্যবিন্দু M ও Q যুক্ত কর

আয়ত $GK = LK.KH = LK.KP.$

$= (LM + MK)(LM - MK)$

$= LM^2 - MK^2 = MQ^2 - MK^2 = KQ^2$ ($\because$ $\angle MKQ =$ সম $\angle$)

কিন্তু আযত $GK = \triangle EGF = ABCDE$ পঞ্চভুজ ;

$\therefore$ ABCDE পঞ্চভুজ $= KQ^2 = KNOQ$ বর্গক্ষেত্র।

দ্রষ্টব্য। যে কোন বহুভুজের সমান একটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত করিতে হইলে,

(1) বহুভুজটিকে একটি সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট ত্রিভুজে পবিণত কব.

(2) উক্ত ত্রিভুজের সমান একটি আযতক্ষেত্র আঁক,

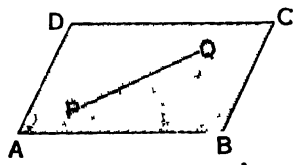
(3) আযতক্ষেত্রটির সমান একটি বর্গক্ষেত্র আঁক।

ঘন জ্যামিতি

প্রথম অধ্যায়

সংজ্ঞা ও স্বতঃসিদ্ধ

1. **সমতল।** কোন তলের যে কোন দুইটি বিন্দু সরলরেখা দ্বারা সংযুক্ত কবিলে যদি সরলরেখাটি সম্পূর্ণভাবে ঐ তলেব সহিত মিলিযা যায তাহা হইলে উক্ত তলকে **সমতল** বলা যায।

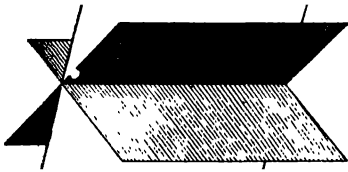
AC তলের উপর P, Q যে কোন দুইটি বিন্দু। P ও Q বিন্দুব সংযোজক সরলরেখা PQ, AC-তলের উপর সম্পূর্ণভাবে মিলিয়া গিযাছে। এক্ষেত্রে AC কে সমতল বলা যায।

দ্রষ্টব্য। চিত্রে কোন সমতলকে আয়তাকারে সীমাবদ্ধ ক্ষেত্ররূপে দেখান হয়, কিন্তু প্রকৃতপক্ষে সমতলের পরিসর অসীম।

2. এক বা একাধিক রেখাদ্বারা সীমাবদ্ধ সমতলের অংশকে **সামতলিক ক্ষেত্র** (Plane figure) বলে।

সমতলকে অসীম কল্পনা করিলে বুঝা যায় যে

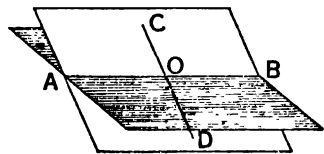
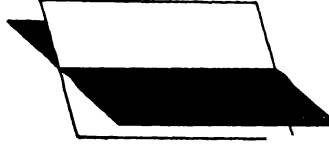
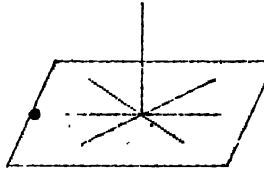
(*i*) কোন সমতলের উপর কোন সরলরেখার আংশিক অবস্থান অসম্ভব অর্থাৎ অসীম কোন সরলরেখার এক নির্দিষ্ট অংশ কোন সমতলে অবস্থিত হইলে সমগ্র সরলরেখাটি ঐ সমতলেই অবস্থিত হইবে।

(*ii*) এক সমতলে অবস্থিত কোন সরলরেখা অপর কোন সমতলকে একাধিক বিন্দুতে ছেদ করিতে পারে না, কারণ দ্বিতীয় তলকে একাধিক বিন্দুতে ছেদ করিলে উহা প্রথম তল হইতে অভিন্ন হইবে।

(*iii*) একই সরলরেখা ধারণ করে এইরূপ অসংখ্য সমতল অঙ্কিত হইতে পারে। নীচের চিত্রটি দেখ।

সামতলিক জ্যামিতিতে বিন্দু, রেখা ও ক্ষেত্রাদিকে একই সমতলে অবস্থিত ধরিয়া লওয়া হয়। সুতরাং উহাতে দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ এই দুইটি আয়তন বা মাত্রা ব্যতীত আর কোন আয়তনের অস্তিত্ব নাই। এই জন্য সামতলিক জ্যামিতি দ্বিমাত্রিক (Geometry of two dimensions).

কিন্তু ঘন জ্যামিতিতে (Solid Geometry) তৃতীয় আয়তনেরও (উচ্চতা বা গভীরতা) কল্পনা করা হয়। চিত্রাদি একই সমতলে দেখান হইলেও, উহারা একাধিক সমতলে অবস্থিত, সুতরাং তিনটি মাত্রাযুক্ত ঘন পদার্থের আকারে উহাদিগকে কল্পনা করিতে হইবে।

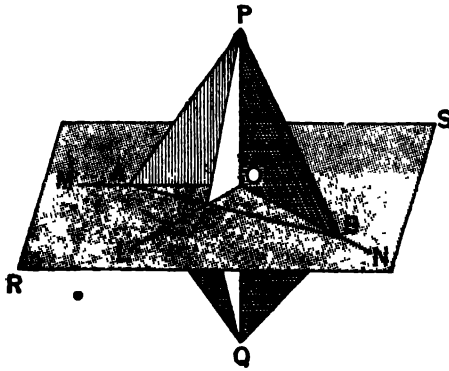
3. ঘন জ্যামিতির উপপাদ্য শিক্ষার পূর্বে নিম্নলিখিত স্বতঃসিদ্ধ দুইটি জানা আবশ্যক :

স্বতঃসিদ্ধ 1. দুইটি পরস্পরচ্ছেদী সরলরেখার মধ্য দিয়া একটি মাত্র সমতল অঙ্কিত হইতে পারে। পাশের চিত্র দেখ।

স্বতঃসিদ্ধ 2. দুইটি পরস্পরচ্ছেদী সমতল একটি মাত্র সরলরেখায় ছেদ করিতে পারে এবং ঐ সরলরেখার বহিঃস্থ কোন বিন্দুতে ছেদ করিতে পারে না। নিম্নের চিত্র দেখ।

4. লম্ব ও সমতল। যদি একটি সরলরেখা সমতলকে কোন বিন্দুতে এরূপভাবে ছেদ করে যে ঐ ছেদবিন্দুর ভিতর দিয়া ঐ সমতলে অঙ্কিত যে কোন সরলরেখার উপর উহা লম্ব হয়, তাহা হইলে পূর্বোক্ত সরলরেখাকে ঐ সমতলের উপর লম্ব বা অভিলম্ব (Normal) বলা হয়।

বস্তুতঃ কোন সমতলের যে কোন দুইটি সরলরেখার উপর যুগপৎ কোন সরলরেখা লম্ব হইলে, উহা সমগ্রতলের উপর লম্ব হইবে।

দ্বিতীয় অধ্যায়

উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা

উপপাদ্য 1

কোন সরলরেখা পরস্পরচ্ছেদী দুইটি সরলরেখার ছেদ-বিন্দুতে উহাদের প্রত্যেকটির উপর লম্ব হইলে, পরস্পরচ্ছেদী সরলরেখা দুইটি যে সমতলে অবস্থিত তাহার উপরও লম্ব হইবে। [If a straight line is perpendicular to each of two intersecting straight lines at their point of intersection, it is also perpendicular to the plane in which they lie.]

মনে কর RS সমতলে অবস্থিত OM, ON দুইটি পরস্পরচ্ছেদী সরলরেখার ছেদবিন্দু O-তে PO সরলরেখা OM এবং ON-এর উপর লম্ব।

প্রমাণ করিতে হইবে যে PO, সমগ্র RS সমতলের উপর লম্ব।

অঙ্কন। O-বিন্দু হইতে RS-সমতলে OL যে কোন একটি সরলরেখা আঁক।

ACB একটি সরলরেখা আঁক যাহা OM, OL, ON-কে যথাক্রমে A, C, এবং B-বিন্দুতে ছেদ করে।

PO-কে Q পর্যন্ত বর্ধিত কর যেন OQ = PO হয়।

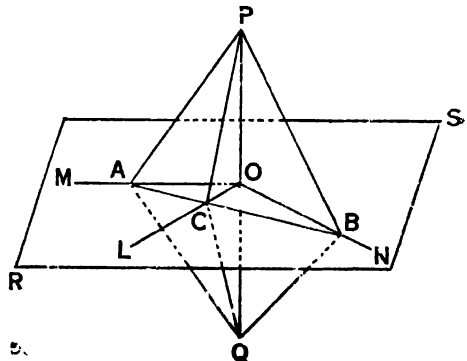
P এবং Q বিন্দু দুইটিকে A, C, B-র সহিত যুক্ত কর।

প্রমাণ। APQ সমতলে, OA, PQ-র লম্ব-দ্বিখণ্ডক ; $\therefore$ AP = AQ

অনুরূপ ভাবে, BP = BQ

$\because \triangle PAB \equiv \triangle QAB$.

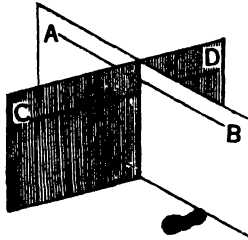
$\therefore \angle PAC = \angle QAC$

$\therefore \triangle PAC \equiv \triangle QAC \quad \therefore PC = QC$

সুতরাং PCQ সমতলে C-বিন্দু PQ-র লম্ব-দ্বিখণ্ডকের উপর অবস্থিত।
অর্থাৎ PO, OC-র উপর লম্ব।
RS সমতলে অবস্থিত OC-র যে কোন অবস্থানে PO, OC-র উপর লম্ব।
∴ PO, সমগ্র RS-সমতলের উপর লম্ব।

5. দুই বা ততোধিক সরলরেখা একই সমতলে অবস্থিত হইলে উহাদিগকে **একসমতলীয়** (Co-planar) বলা হয়।

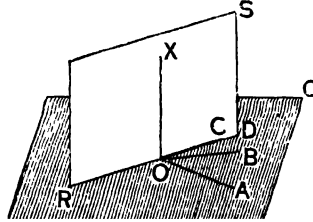
উপরের চিত্রে চারিটি সরলরেখা একই সমতলে অবস্থিত বলিয়া উহারা এক সমতলীয়।

এক সমতলীয় দুইটি সরলরেখা পরস্পর ছেদ করিবে অথবা সমান্তরাল হইবে।

6. যে সমস্ত সরলরেখার মধ্য দিয়া কোন সমতল অঙ্কন করা যায় না তাহাদিগকে **অসমতলীয়** বা **Skew** বলা হয়।

Skew সরলরেখা সমূহ পরস্পর ছেদও করে না অথবা পরস্পর সমান্তরালও নহে। উপরের চিত্রে AB, CD দুইটি skew সরলরেখা।

উপপাদ্য 2

কোন সরলরেখার কোন বিন্দুতে অঙ্কিত লম্বসমূহ এক-সমতলীয়।

[All straight lines drawn perpendicular to a given straight line at a given point of it are co-planar.]

মনে কর, OX একটি সরলরেখা এবং OA, OB, OC প্রত্যেকেই OX-এর O-বিন্দুতে লম্ব।

প্রমাণ করিতে হইবে OA, OB, OC এক-সমতলীয়।

অঙ্কন। মনে কর, OA OB, PQ-সমতলে অবস্থিত এবং OC, OX, RS-সমতলে অবস্থিত।

মনে কর, PQ এবং RS সমতল দুইটি OD সরলরেখায় ছেদ করিয়াছে।

প্রমাণ। যেহেতু XO, OA এবং OB-র উপর লম্ব,

∴ XO, OD-র উপর লম্ব (একই সমতলে অবস্থিত বলিয়া)

∴ $\angle$XOD = এক সমকোণ

= $\angle$XOC এবং RS-সমতলে অবস্থিত।

∴ OC, OD পরস্পর সমাপতিত হইবে।

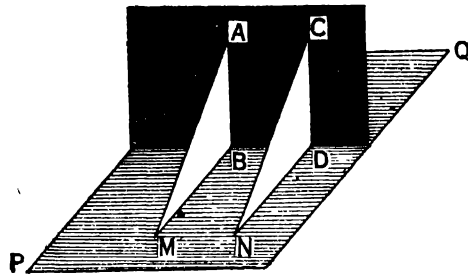
সুতরাং OA, OB, OC একই সমতলে অবস্থিত।

অনুশীলনী। কোন বিন্দুর মধ্য দিয়া কোন সরলরেখার উপরে একটিমাত্র সমতল লম্বভাবে অঙ্কিত হইতে পারে।

[Through any point there can be only one plane normal to a given straight line.]

উপপাদ্য 3

দুইটি সমান্তরাল সরলরেখার একটি কোন সমতলের উপর লম্ব হইলে, অপরটিও ঐ সমতলের উপর লম্ব হইবে।

[If two straight lines are parallel and if one of them is perpendicular to a plane, then the other is also perpendicular to the same plane.]

মনে কর, AB ∥ CD এবং AB, PQ-সমতলের উপর লম্ব।

প্রমাণ করিতে হইবে যে CD, PQ-সমতলের উপর লম্ব।

অঙ্কন। D-বিন্দু হইতে PQ সমতলে যে কোন DN সরলরেখা আঁক এবং B-বিন্দু হইতে PQ-সমতলে BM ∥ DN আঁক।

প্রমাণ। ABM এবং CDN সমতলে

AB ∥ CD এবং BM ∥ DN

$\therefore \quad \angle ABM = \angle CDN.$

কিন্তু, $\angle ABM$ সমকোণ, (∵ AB, PQ সমতলের উপর লম্ব).

$\therefore \quad \angle CDN$ সমকোণ।

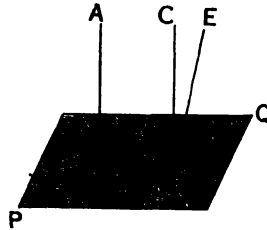
PQ-সমতলে অবস্থিত DN-এর যে কোন অবস্থানে $\angle CDN$ সমকোণ হইবে।

সুতরাং CD, PQ সমতলের উপর

উপপাদ্য 4

(উপপাদ্য-3 এর বিপরীত প্রতিজ্ঞা)

দুইটি সরলরেখা কোন সমতলের উপর লম্ব হইলে উহারা পরস্পর সমান্তরাল।

[If two straight lines are perpendicular to the same plane, they are parallel to one another.]

AB ও CD, PQ সমতলের উপর লম্ব,

প্রমাণ করিতে হইবে CD $\parallel$ AB.

যদি CD $\parallel$ AB না হয়, D হইতে DE $\parallel$ BA আঁক।

প্রমাণ। ED $\parallel$ AB এবং AB PQ সমতলে লম্ব ;

$\therefore$ ED, PQ সমতলে লম্ব।

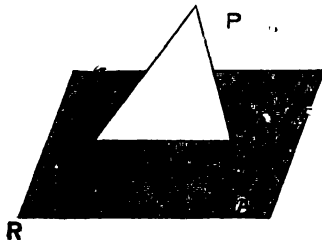
কিন্তু CD, PQ সমতলে লম্ব ;

সুতরাং ED এবং CD উভয়েই PQ সমতলে লম্ব ;

ইহা অসম্ভব ;

$\therefore$ CD $\parallel$ AB.

দুইটি সম্পাদ্য

1. Draw a straight line perpendicular to a given plane from a given point outside it.

বহিঃস্থ P-বিন্দু হইতে RS সমতলে একটি লম্ব টানিতে হইবে।

RS সমতলে AB যে কোন সরলরেখা আঁক এবং PAB সমতলে PO $\perp$ AB আঁক।

O হইতে RS সমতলে OT $\perp$ AB আঁক।

যদি $\angle POT$ সমকোণ হয় তাহা হইলে, OP নির্ণেয় লম্ব।

যদি $\angle POT$ সমকোণ না হয়, OT-র উপর PQ লম্ব আঁক।

তাহা হইলে PQ অভীষ্ট লম্ব।

প্রমাণ। Q বিন্দু দিয়া RS সমতলে MN ∥ AB আঁক।

∴ $OB \perp OQ$ এবং OP,

∴ $OB \perp POQ$ সমতল।

কিন্তু MN ∥ AB, ∴ $MN \perp POQ$ সমতল ;

∴ $\angle PQN$ = সমকোণ এবং $\angle PQO$ = সমকোণ ;

∴ $PQ \perp RS$ সমতল।

2. To draw a perpendicular to a given plane from a given point in it.

B

Q

RS সমতলে A একটি বিন্দু। A বিন্দু হইতে RS সমতলে একটি লম্ব অঙ্কিত করিতে হইবে।

বহিঃস্থ যে কোন P বিন্দু হইতে RS সমতলে PQ একটি লম্ব আঁক। (সম্পাদ্য 1)

উক্ত লম্ব A বিন্দু দিয়া গেলে, উহাই অভীষ্ট লম্ব।

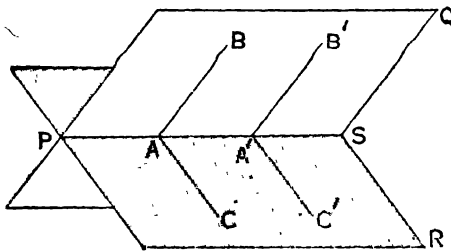
অন্যথায়, A বিন্দু দিয়া AB ∥ PQ আঁক

তাহা হইলে AB অভীষ্ট লম্ব।

প্রমাণ। AB ∥ PQ এবং PQ, RS সমতলে লম্ব

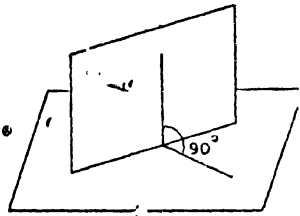
∴ AB, RS সমতলে লম্ব।

দুই তলের অন্তর্বর্তী কোণ, সরলরেখার সহিত তলের কোণ-সম্বন্ধ, সমান্তরাল সরলরেখা ও সমতল।

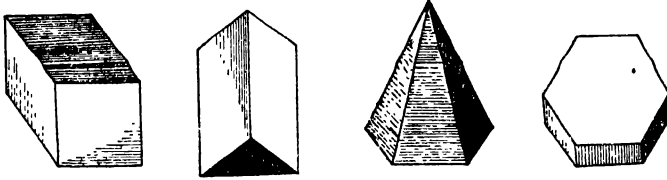
7. পরস্পরচ্ছেদী দুই সমতলের অন্তর্বর্তী কোণ। দুইটি সমতলের পরস্পর অবনতি অথবা দুই সমতলের অন্তর্বর্তী কোণকে **দ্বিতল কোণ** (Dihedral angle) বলে। দুইটি সরলরেখা পরস্পর ছেদ করিয়া যেমন চারিটি কোণ উৎপন্ন করে, দুইটি সমতলও সেইরূপ পরস্পর ছেদ করিয়া চরিটি দ্বিতল কোণ উৎপন্ন করে।

দুইটি সমতল যে সরলরেখায় ছেদ করে সেই সরলরেখার একই বিন্দু হইতে উভয় সমতলে ছেদক সরলরেখার উপর লম্ব অঙ্কন করিলে ঐ দুই লম্বের অন্তর্ভুক্ত কোণের পরিমাণ দ্বারা দুই সমতলের মধ্যবর্তী দ্বিতল কোণের পরিমাণ সূচিত হয়।

উপরের চিত্রে PQ এবং PR সমতল PS-সরলরেখার বরাবর ছেদ করিয়াছে এবং PS-সরলরেখার A বিন্দু হইতে PQ-সমতলে AB এবং PR-সমতলে AC লম্ব টানা হইয়াছে এবং $\angle BAC$ দ্বারা PQ এবং PR সমতলের অন্তর্গত দ্বিতল কোণ সূচিত হইতেছে।

PS সরলরেখার যে কোন বিন্দুতে PQ এবং PR সমতলের অন্তর্গত দ্বিতল কোণ সমান। চিত্রে $\angle BAC = \angle B'A'C'$.

8. দুই সমতলের অন্তর্গত দ্বিতল কোণ সমকোণ হইলে সমতল দুইটি পরস্পর লম্ব হইবে।

ঘরের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থের দুইটি দেওয়াল, ঘরের দেওয়াল এবং মেঝে, দেওয়াল এবং

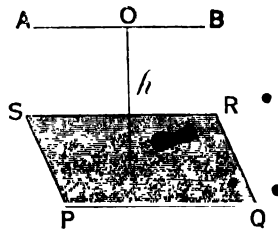
ছাদের নিম্নতল প্রভৃতি পরস্পরচ্ছেদী দুইটি সমতলের প্রকৃষ্ট উদাহরণ। প্রত্যেকস্থলে দুইটি সমতল সরলরেখায় ছেদ করে অর্থাৎ দুইটি সমতল যেখানে ছেদ করে তথায় একটি সরলরেখা উৎপন্ন হয়।

ঘরের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থের দেওয়াল দুইটির মধ্যবর্তী দ্বিতল কোণ সাধারণতঃ সমকোণ। এইরূপ ক্ষেত্রে দেওয়াল দুইটি পরস্পর লম্ব। সুতরাং ঐরূপ দেওয়ালের উপরিভাগ বা তলকে পরস্পর লম্বভাবে ছেদকারী সমতলের উদাহরণস্বরূপ ধরা যাইতে পারে।

উপরের চিত্রগুলিতে পরস্পরচ্ছেদী সমতলগুলি লক্ষ্য কর এবং দুই দুই তলের অন্তর্গত দ্বিতল কোণগুলি লক্ষ্য কর।

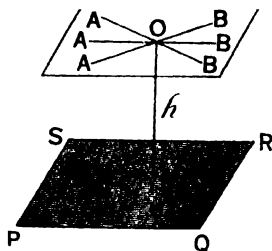
দুইটি সমতল পরস্পর লম্বভাবে ছেদ করিলে ছেদ-রেখা হইতে এক সমতলে অঙ্কিত লম্ব অপর সমতলে লম্ব হইবে।

9. সমান্তরাল সমতল ও সরলরেখা।

একসমতলীয় দুইটি সরলরেখার মধ্যে কোন সাধারণ বিন্দু না থাকিলে উহাদিগকে সমান্তরাল সরলরেখা বলা হয়।

একটি সরলরেখা এবং একটি সমতলের মধ্যে কোন সাধারণ বিন্দু না থাকিলে উহারা পরস্পর সমান্তরাল।

AB সরলরেখাটি PR সমতলের সহিত সমান্তরাল এবং PR-সমতল হইতে h-দূরে অবস্থিত। AB সরলরেখাটিকে যথেচ্ছভাবে উভয়দিকে বর্ধিত করিলে এবং PR

সমতলকেও যথেচ্ছভাবে সকল দিকে প্রসারিত করিলে, AB সরলরেখাটি PR-সমতলের সহিত মিলিত হইবে না। সুতরাং AB-সরলরেখা PR-সমতলের সহিত সমান্তরাল।

এখন AB সরলরেখাটিকে PR-সমতলের সহিত সমান্তরাল রাখিয়া O-বিন্দুর চতুর্দিকে ঘুরাইলে AB-সরলরেখা একটি সমতল উৎপন্ন করিবে। এই সমতল PR-সমতলের সহিত সমান্তরাল হইবে। AB যেরূপ PR-সমতলের সহিত কখনও মিলিত হইবে না, তদ্রূপ ঘূর্ণ্যমান AB দ্বারা উৎপন্ন সমতলও PR-সমতলের সহিত কখনও মিলিত হইবে না।

সুতরাং, দুইটি সমতলকে যথেচ্ছভাবে সমস্ত দিকে প্রসারিত করিলেও যদি উহারা মিলিত না হয়, তাহা হইলে, উহাদিগকে সমান্তরাল সমতল বলা হয়।

দুইটি সমান্তরাল সমতলেরও কোন সাধারণ বিন্দু থাকিতে পারে না।

সুতরাং,

(i) একটি সরলরেখা একটি সমতলের সহিত কখনও মিলিত হইতে না পারে (এস্থলে উভয়ে সমান্তরাল)।

(ii) একটি সরলরেখা কোন সমতলের সহিত একটিমাত্র বিন্দুতে মিলিত হইতে পারে (h সরলরেখাটির সহিত সমতলের মিলন-বিন্দু লক্ষ্য কর)।

(iii) একটি সরলরেখা একটি সমতলের সহিত অসংখ্য বিন্দুতে মিলিত হইতে পারে (এস্থলে সরলরেখাটি ঐ সমতলে অবস্থিত)।

10. সমতলের উপর বিন্দুর অভিক্ষেপ—কোন বিন্দু হইতে কোন সমতলের উপর অঙ্কিত লম্ব সমতলের সহিত যে বিন্দুতে মিলিত হয় সেই বিন্দুকে প্রথমোক্ত বিন্দুর

অভিক্ষেপ বা **লম্ব অভিক্ষেপ** (Projection or orthogonal projection) বলা হয়।

PQ-সমতলের উপর A-বিন্দুর অভিক্ষেপ B-বিন্দু।

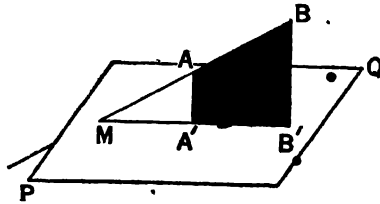
A

B

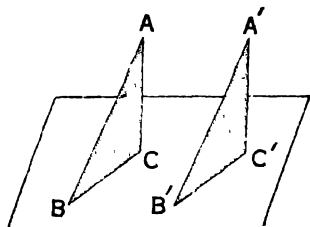
11. সমতলের উপর সরলরেখার অভিক্ষেপ—কোন সমতলের উপর কোন সরলরেখার প্রত্যেক বিন্দুর অভিক্ষেপের সঞ্চারপথই ঐ সমতলের উপর উক্ত সরলরেখার অভিক্ষেপ।

(1) কোন সরলরেখা সমতলের উপর লম্ব হইলে লম্ব ও সমতলের ছেদবিন্দুই সমতলের উপর ঐ সরলরেখার অভিক্ষেপ হইবে।

পূর্ব চিত্রে AB সরলরেখা PQ সমতলের উপর B-বিন্দুতে লম্ব। সুতরাং এস্থলে B-বিন্দুই PQ সমতলের উপর AB সরলরেখার অভিক্ষেপ।

(2) কোন সরলরেখা সমতলকে তির্যক্‌ভাবে ছেদ করিলে, ঐ সমতলের উপর তির্যক্ রেখাটির অভিক্ষেপ একটি সরলরেখা হইবে।

AB সরলরেখা PQ সমতলকে তির্যক্‌ভাবে ছেদ করিয়াছে। AB-র প্রত্যেক বিন্দু হইতে ঐ সমতলের উপর লম্ব অঙ্কন করিলে A′…B′ প্রভৃতি বিন্দুগুলি একই

A′B′ সরলরেখায় অবস্থিত হইবে। এস্থলে A′B′ সরলরেখাই PQ-সমতলের উপর AB সরলরেখার অভিক্ষেপ ; কারণ, PQ-সমতলের উপর AB সরলরেখার প্রত্যেক বিন্দুর সঞ্চারপথ A′B′ সরলরেখা।

যদি AB সরলরেখাটি PQ সমতলকে M-বিন্দুতে ছেদ করে, তাহা হইলে AB এবং AB-এর অভিক্ষেপের অন্তর্গত AMA′ কোণকে PQ-সমতলের উপর AB-সরলরেখার অবনতি বা উৎপন্ন কোণ বলা হয়।

(3) কোন সমতলের উপর দুইটি সমান্তরাল সরলরেখার অবনতি সমান।

চিত্রে, AB ∥ A′B′, BC এবং B′C′ যথাক্রমে উহাদের অভিক্ষেপ। এস্থলে $\angle ABC = \angle A'B'C'$.

বিবিধ সমাধান

(Miscellaneous exercises worked out)

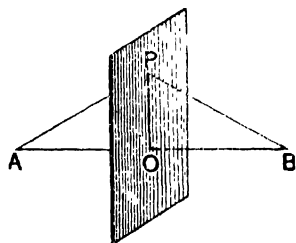
1. Find the locus of a point in space equidistant from two given points. [C. U. 1947]

A ও B দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু।

A ও B হইতে সমদূরবর্তী বিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় করিতে হইবে।

সঞ্চারপথ নির্ণয়। AB যোগ কর এবং AB-র মধ্যবিন্দু O নির্ণয় কর।

এখন O-বিন্দু দিয়া AB-র উপর লম্বভাবে অবস্থিত হয় এরূপ একটি সমতল আঁক।

এই সমতলের উপর P-যে কোন বিন্দু লও এবং PA, PB এবং PO যোগ কর। এখন, BO, উক্ত সমতলের উপর লম্ব বলিয়া BO, OP-র উপর লম্ব, কারণ OP এই সমতলে অবস্থিত। তদ্রূপ AO, OP-র উপর লম্ব।

APO এবং BPO ত্রিভুজদ্বয়ে,

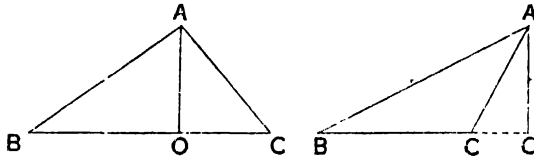
OA = OB, PO সাধারণ বাহু এবং ∠AOP = ∠BOP (সমকোণ বলিয়া)

∴ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম।

∴ AP = BP.

উক্ত সমতলের যে কোন P বিন্দুর পক্ষে AP = BP.

সুতরাং ঐ সমতলই নির্ণেয় সঞ্চারপথ।

2. If a triangle revolves about its base, show that the vertex describes a circle. [C. U. 1919]

মনে কর ABC একটি ত্রিভুজ।

প্রমাণ করিতে হইবে যে BC-কে স্থির রাখিয়া ABC ত্রিভুজকে BC-র চারিদিকে ঘুরাইলে A-বিন্দু একটি বৃত্ত অঙ্কিত করিবে।

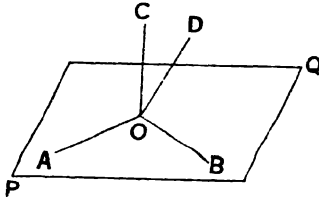
প্রমাণ। A হইতে BC-র উপর (বা বর্ধিত BC-র উপর) AO লম্ব টান।

এখন, A হইতে BC-র উপর AO লম্ব বলিয়া AO-র দৈর্ঘ্য ধ্রুবক এবং O একটি নির্দিষ্ট বিন্দু।

এখন, BAC ত্রিভুজটিকে BC অক্ষের চারিদিকে ঘুরাইলে OA সকল অবস্থানেই BC-র উপর লম্ব হইবে

সুতরাং OA সরলরেখার ঘূর্ণন দ্বারা একটি বৃত্ত অর্থাৎ বৃত্তকল উৎপন্ন হইবে যে তলটি BC সরলরেখার সহিত লম্বভাবে অবস্থিত।

সুতরাং ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুর সঞ্চারপথ একটি বৃত্ত যাহার কেন্দ্র O এবং ব্যাসার্ধ OA এবং ঐ বৃত্ততলটি BC-র উপর লম্ব।

3. Prove that there cannot be more than three mutually perpendicular straight lines in space meeting at a point.
[C. U. '32, '36, '48]

মনে কর, OA, OB, OC সরলরেখা তিনটি O-বিন্দুতে পরস্পরের উপর লম্ব।

চতুর্থ কোন সরলরেখা OA, OB, OC-র উপর পরস্পর লম্ব হইতে পারে না।

যদি সম্ভব হয়, মনে কর OD, OA, OB পরস্পর লম্ব।

মনে কর, OA, OB, PQ-সমতলে অবস্থিত।

এখন, যেহেতু OC, OA এবং OB-এর উপর লম্ব,

সুতরাং OC, PQ-সমতলের উপর লম্ব।

আবার, OD, OA এবং OB-এর উপর লম্ব ; সুতরাং OD, PQ-সমতলের উপর লম্ব।

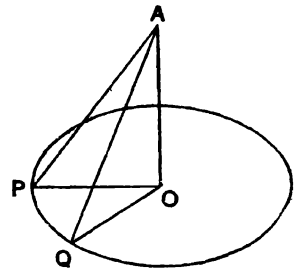
সুতরাং OC, OD, PQ-সমতলের একই O বিন্দুতে PQ-সমতলের উপর লম্ব। কিন্তু OC, OD একই সরলরেখা না হইলে ইহা অসম্ভব, অর্থাৎ OC, OD মিলিত হইয়া একই সরলরেখায় পরিণত হইবে।

অতএব, তিনটির অধিক সরলরেখা পরস্পরের উপর কোন সমতলের একই বিন্দুতে লম্ব হইতে পারে না।

4. From O, the centre of a circle, a perpendicular OA is erected to the plane. Show that all points on the circumference are equidistant from A.

মনে কর O বৃত্তের কেন্দ্র এবং OA বৃত্ত-সমতলের উপর লম্ব।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, পরিধির উপর সমস্ত বিন্দু A হইতে সমদূরবর্তী।

পরিধির উপর P এবং Q দুইটি বিন্দু লও এবং AP, QA এবং OP, OQ যোগ কর।

প্রমাণ। OA সমতলের উপর লম্ব; সুতরাং উহা বৃত্ততলস্থ সমস্ত সরলরেখার উপর লম্ব

তাহা হইলে, OA, OP এবং OQ-র উপর লম্ব;

সুতরাং $\angle AOP$ এবং $\angle AOQ$ প্রত্যেকেই এক সমকোণ।

এখন, AOP এবং AOQ ত্রিভুজে,

OP = OQ (একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ বলিয়া),

OA সাধারণ বাহু,

এবং অন্তর্ভূত $\angle AOP$ = অন্তর্ভূত $\angle AOQ$.

$\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম।

$\therefore$ AP = AQ.

5. Straight lines in space which are parallel to a given straight line are parallel to one another. [C. U. '29, '35]

মনে কর, AB, CD যে কোন দুইটি সরলরেখার প্রত্যেকটিই PQ-সরলরেখার সমান্তরাল।

প্রমাণ করিতে হইবে AB ও CD পরস্পর সমান্তরাল।

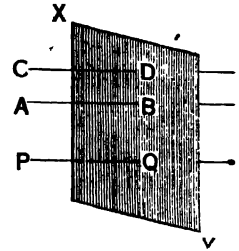
প্রমাণ। PQ সরলরেখার Q বিন্দু দিয়া XY সমতল আঁক যাহা PQ-এর সহিত লম্বভাবে অবস্থিত।

এখন, যেহেতু PQ||AB এবং PQ, XY সমতলের উপর লম্ব,

সুতরাং AB, XY সমতলের উপর লম্ব।

তদ্রূপ, CD, XY সমতলের উপর লম্ব।

তাহা হইলে, AB ও CD উভয় সরলরেখাই XY সমতলের উপর লম্ব.

সুতরাং AB||CD.

অনুশীলনী 1

1. Show that if three or more parallel straight lines intersect a given straight line, they are co-planar. [C. U. 1921]

2. If a straight line outside a given plane is parallel to any straight line drawn in the plane, it is parallel to the plane itself. [C. U. 1931]

3. If a straight line is parallel to each of two planes, prove that it is parallel to their line of intersection. [C. U. 1934]

4. Two planes drawn through each of two parallel straight lines cut one another in a straight line parallel to them. [C. U. 1922]

5. Show that any number of straight lines passing through a given point and intersecting a given straight line are co-planar. [C. U. 1954]

6. AB and CD are two intersecting straight lines; EF is another straight line parallel to CD and meeting AB at some point. Show that the three lines lie in one plane. [C. U. 1956]

7. Find the locus of a point in space equidistant from three given non-collinear points. [C. U. 1941]

8. If a right angle rotates about one of its sides containing the right angle, the other side generates a plane.

9. How many horizontal lines can be drawn through a given point of a vertical line and how do they lie? [C. U. 1916]

10. Find the locus of the foot of the perpendicular drawn from a given point upon any plane passing through a given straight line. [D. B. 1924]

11. If perpendiculars are drawn from any point to a system of parallel straight lines in space, then all the perpendiculars lie on a plane perpendicular to the parallel lines. [C. U. 1927]

পরিমিতি (ঘনক্ষেত্র)

প্রথম অধ্যায়

1. কতিপয় প্রয়োজনীয় ক্ষেত্রফল (পুনরালোচনার জন্য)

(i) a, b সন্নিহিত বাহুবিশিষ্ট আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= a \times b$.

(ii) একবাহু a এবং উহার উপর উন্নতি h বিশিষ্ট সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল $= a \times h$.

a

(iii) (1) ভূমি a এবং অনুরূপ উন্নতি h বিশিষ্ট ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} a \times h$.

(2) a, b, c বাহুবিশিষ্ট ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.

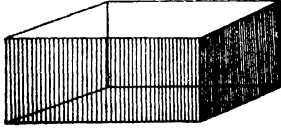
[যদি $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ হয়।]

(iv) ব্যাসার্ধ r হইলে,

(1) বৃত্তের ক্ষেত্রফল $= \pi r^2$ [$\pi = \frac{22}{7}$ স্থূলতঃ]

(2) বৃত্তের পরিধি $= 2\pi r = \pi d$ [$d =$ ব্যাস]

চৌপল ও ঘনক
Parallelepiped and Cube

2. ঘনত্ব বিষয়ক এককাবলি প্রসঙ্গে আলোচনা করা হইয়াছে যে যাহার দৈর্ঘ্য, বিস্তার ও বেধ আছে, তাহাকে **ঘন** (solid) বলে। যে ঘনের ছয়টি পৃষ্ঠ বা তল আছে, যাহার দুই দুইটি সম্মুখবর্তী পৃষ্ঠ বা তল সমান্তরাল এবং যাহার সমস্ত ধারের কোণগুলি সমকোণ, তাহাকে **আয়তঘন** বা **সমকোণী চৌপল** (Parallelepiped) বলে।

আয়তঘনের দৈর্ঘ্য, বিস্তার ও বেধ পরস্পর সমান হইলে তাহাকে **ঘনক্ষেত্র** বা **ঘনক** (Cube) বলে। সুতরাং ঘনক্ষেত্রের ছয়টি তল বা পৃষ্ঠ সমান ক্ষেত্রফল-বিশিষ্ট এবং প্রত্যেকটি বর্গাকার।

ঘনক্ষেত্রের পৃষ্ঠ বা তলসমূহ দ্বারা অধিকৃত স্থান পরিমাণকে **ঘনফল** বা **ঘনপরিমাণ** (Volume) বলে।

ক্ষেত্রফল নির্ণয় করিতে যেমন রৈখিক এককের বর্গ-পরিমিত ক্ষেত্রফলকে একক ধরিতে হয়, ঘনফল নির্ণয় করিতেও সেইরূপ রৈখিক এককের ঘনক্ষেত্র (cube)-কে একক ধরিতে হয়।

3. আয়তঘনের ঘনফল = দৈর্ঘ্য × বিস্তার × বেধ ;

সুতরাং আয়তঘনের ঘনফলকে যে কোন একটি মাত্রা (দৈর্ঘ্য, বিস্তার বা বেধের যে কোন একটি) দ্বারা ভাগ করিলে অপর দুইটি মাত্রাবিশিষ্ট আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল পাওয়া যায় এবং ঘনফলকে দুই মাত্রাবিশিষ্ট আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল দ্বারা ভাগ করিলে তৃতীয় মাত্রা পাওয়া যায়।

ঘনক্ষেত্রের ঘনফলের ঘনমূল নির্ণয় করিলে ছয়টি বর্গাকার ক্ষেত্রের যে কোন একটির বাহু পাওয়া যায়।

4. আয়তঘনের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ, ও বেধ যথাক্রমে a, b, c হইলে, উহার **তল পরিমাণ** $= 2(ab + bc + ca)$.

উদা. 1. কোন আয়তঘনের দৈর্ঘ্য, বিস্তার ও বেধের পরিমাণ যথাক্রমে 4 ফুট, 2 ফুট 6 ইঞ্চি এবং 1 ফুট 3 ইঞ্চি ; ইহার ঘনফল কত ?

নির্ণেয় ঘনফল $= 4 \times 2\frac{1}{2} \times 1\frac{1}{4}$ ঘনফুট $= 4 \times \frac{5}{2} \times \frac{5}{4}$ ঘনফুট

$= \frac{25}{2}$ ঘনফুট $= 12$ ঘনফুট 864 ঘনইঞ্চি।

উদা. 2. একটি আয়তঘনের ঘনফল 7 ঘনফুট 864 ঘনইঞ্চি, দৈর্ঘ্য 4 ফুট, বিস্তার 1 ফুট 3 ইঞ্চি ; উহার বেধ কত ?

ঘনফল $= 7$ ঘনফুট 864 ঘনইঞ্চি $= 7\frac{1}{2}$ ঘনফুট $= \frac{15}{2}$ ঘনফুট।

দৈর্ঘ্য $= 4$ ফুট এবং বিস্তার $= 1\frac{1}{4}$ ফুট $= \frac{5}{4}$ ফুট ;

$\therefore$ নির্ণেয় বেধ $= \{\frac{15}{2} \div (4 \times \frac{5}{4})\}$ ফুট $= \frac{15}{2} \times \frac{1}{5} = \frac{3}{2}$ ফুট $= 1$ ফুট 6 ইঞ্চি।

উদা. 3. ঢাকনি সমেত একটি কাঠের বাক্সের বহির্দেশের দৈর্ঘ্য, বিস্তার ও উচ্চতা যথাক্রমে 3 ফুট 4 ইঞ্চি, 2 ফুট 4 ইঞ্চি এবং 1 ফুট 5 ইঞ্চি। উহা $\frac{1}{2}$ ইঞ্চি পুরু তক্তা দ্বারা নির্মিত। (1) বাক্সটির ভিতরের ঘনফল কত ? (2) বাক্সটি নির্মাণে কত ঘনফুট কাঠ লাগিয়াছে ? (3) যদি প্রতি ঘনফুট কাঠের ওজন 864 আউন্স হয়, তবে বাক্সটির ওজন কত ?

(1) ভিতরের মাপে বাক্সটির দৈর্ঘ্য, বিস্তার ও বেধ যথাক্রমে 3 ফুট 3 ইঞ্চি, 2 ফুট 3 ইঞ্চি এবং 1 ফুট 4 ইঞ্চি বা $3\frac{1}{4}$ ফুট, $2\frac{1}{4}$ ফুট এবং $1\frac{1}{3}$ ফুট।

$\therefore$ বাক্সটির ভিতরের ঘনফল $= 3\frac{1}{4} \times 2\frac{1}{4} \times 1\frac{1}{3}$ ঘনফুট $= 9\frac{3}{4}$ ঘনফুট।

(2) কাঠের ঘনফল $= (3\frac{1}{3} \times 2\frac{1}{3} \times 1\frac{5}{12})$ ঘনফুট $- 9\frac{3}{4}$ ঘনফুট

$= (11\frac{1}{54} - 9\frac{3}{4})$ ঘনফুট $= 1\frac{29}{108}$ ঘনফুট।

(3) বাক্সটির ওজন $= 1\frac{29}{108}$ ঘনফুট কাঠের ওজন

$= \frac{137}{108} \times 864$ আউন্স $= 68$ পাউণ্ড 8 আউন্স।

উদা. 4. 20 ফুট দীর্ঘ, 16 ফুট বিস্তৃত একখানি ঘর 3 ফুট বিস্তৃত দেওয়াল দ্বারা বেষ্টিত ; দেওয়াল 11 ফুট উচ্চ হইলে, ঐ দেওয়াল প্রস্তুত করিতে 9 ইঞ্চি দীর্ঘ, 3 ইঞ্চি বিস্তৃত ও 2 ইঞ্চি পুরু কতগুলি ইষ্টকের প্রয়োজন হইবে ?

দেওয়ালের তলদেশের ক্ষেত্রফল $= \{(20+3)+(16+3)\} \times 3 \times 2$ বর্গফুট

$= 42 \times 3 \times 2$ বর্গফুট

∴ দেওয়ালের ঘনফল $= 42 \times 3 \times 2 \times 11$ ঘনফুট।

প্রত্যেক ইষ্টকের ঘনফল $= \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{8}$ ঘনফুট $= \frac{1}{32}$ ঘনফুট।

∴ নির্ণেয় ইষ্টকের সংখ্যা $= 42 \times 3 \times 2 \times 11 \times 32 = 88704$।

প্রশ্নমালা 1

নিম্নলিখিত দৈর্ঘ্য, বিস্তার ও বেধবিশিষ্ট আয়তঘনের ঘনফল নির্ণয় কর :

1. দৈর্ঘ্য 12 ফুট, বিস্তার 10 ফুট, বেধ 7 ফুট।

2. দৈর্ঘ্য 8 ইঞ্চি, বিস্তার 6 ইঞ্চি, বেধ 5 ইঞ্চি।

3. দৈর্ঘ্য 4 ফুট 6 ইঞ্চি, বিস্তার 4 ফুট, বেধ 2 ফুট 6 ইঞ্চি।

4. দৈর্ঘ্য 2 গজ 2 ফুট, বিস্তার 1 ফুট 4 ইঞ্চি, বেধ 1 ফুট 6 ইঞ্চি।

5. কোন ঘনকের প্রত্যেক ধার 2 ফুট 4 ইঞ্চি, উহার ঘনফল কত ?

6. কোন আয়তঘনের ঘনফল 75 ঘনফুট ; উহার দৈর্ঘ্য ও বিস্তার যথাক্রমে 10 ফুট ও 3 ফুট ; বেধ কত ?

7. কোন ঘনকের ঘনফল $42\frac{7}{8}$ ঘনফুট ; ইহার প্রত্যেক ধারের দৈর্ঘ্য কত ?

8. একখানি ঘরের দৈর্ঘ্য ও বিস্তার যথাক্রমে 10 ফুট 6 ইঞ্চি ও 8 ফুট ; উহাতে 840 ঘনফুট বায়ু ধরিলে, ঘরের উচ্চতা কত নির্ণয় কর।

9. একটি চৌবাচ্চার দৈর্ঘ্য 5 ফুট, বিস্তার 4 ফুট ও গভীরতা $3\frac{1}{2}$ ফুট ; এক ঘনফুট জলের ওজন 1000 আউন্স হইলে, ঐ চৌবাচ্চায় কত পাউণ্ড জল ধরে ?

10. 4 ফুট দীর্ঘ, $4\frac{1}{2}$ ইঞ্চি বিস্তৃত ও $2\frac{1}{2}$ ইঞ্চি পুরু এক খণ্ড লৌহের ওজন কত ? (এক ঘনফুট লৌহের ওজন 480 পাউণ্ড)।

11. ঘনকাকার একটি পাত্রের প্রত্যেক ধারের দৈর্ঘ্য 4 ফুট ; প্রতি ঘনফুটে $6\frac{1}{4}$ গ্যালন জল ধরিলে, পাত্রটিতে কত গ্যালন জল ধরে ?

12. একখানি ঘরে 3150 ঘনফুট বায়ু ধরে ; উহার উচ্চতা 10 ফুট 6 ইঞ্চি হইলে, মেজের ক্ষেত্রফল কত ?

13. 3 ঘনফুট লৌহ হইতে 2 ফুট দীর্ঘ, 1 ফুট 6 ইঞ্চি বিস্তৃত, $\frac{1}{8}$ ইঞ্চি পুরু কতখানা চাদর নির্মাণ করা যায় ?

14. কোনও স্থানের বার্ষিক বৃষ্টিপাতের পরিমাণ 14 ইঞ্চি ; প্রতি ঘনফুট জলের ওজন 1000 আউন্স হইলে, ঐস্থানে প্রতি একরে কত টন বৃষ্টিপাত হয় নির্ণয় কর।

15. একখানি ইটের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা যথাক্রমে 9 ইঞ্চি, $4\frac{1}{2}$ ইঞ্চি ও 3 ইঞ্চি হইলে, 45 ফুট দীর্ঘ, 6 ফুট উচ্চ ও 1 ফুট $1\frac{1}{2}$ ইঞ্চি পুরু দেওয়াল নির্মাণ করিতে কত ইটের প্রয়োজন হইবে ?

16. একখানি ঘরের দৈর্ঘ্য বিস্তারের দ্বিগুণ এবং উচ্চতার তিনগুণ। ঘরখানিতে 4500 ঘনফুট বায়ু ধরিলে, ঘরের মেঝের ক্ষেত্রফল কত ?

17. প্রতি ঘনগজ 6 আনা দরে 80 হাত দীর্ঘ, 64 হাত বিস্তৃত ও 10 হাত গভীর একটি পুষ্করিণী খনন করিতে কত ব্যয় হইবে ?

18. 3 ইঞ্চি বর্গ মুখবিশিষ্ট একটি নল দিয়া প্রতি মিনিটে 1333 ফুট 4 ইঞ্চি বেগে জল নির্গত হইলে 312500 পাউণ্ড জল নির্গত হইতে কত ঘণ্টা সময় লাগিবে ?
[1 ঘনফুট জলের ওজন = 1000 আউন্স]

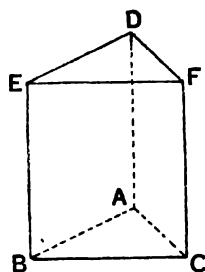
19. একটি আয়তঘন চৌবাচ্চার দৈর্ঘ্য বিস্তারের সমান এবং গভীরতা $5\frac{5}{7}$ ফুট। যদি চৌবাচ্চায় 5 টন জল ধরিতে পারে এবং প্রতি ঘনফুট জলের ওজন 1000 আউন্স হয়, তবে চৌবাচ্চার দৈর্ঘ্য ও বিস্তার কত ?

20. 5 ফুট দীর্ঘ, 4 ফুট বিস্তৃত, $3\frac{2}{3}$ ফুট গভীর একটি চৌবাচ্চায় 30 ঘনফুট জল আছে। সচ্ছিদ্র ইট এক একখানি করিয়া ঐ জলে নিক্ষেপ করিতে করিতে চৌবাচ্চার জল কানায় কানায় পূর্ণ হইল। প্রতি ইটের দৈর্ঘ্য, বিস্তার ও উচ্চতা যথাক্রমে 9 ইঞ্চি, 3 ইঞ্চি এবং $2\frac{2}{3}$ ইঞ্চি হইলে এবং প্রতি ইট নিজ আয়তনের $\frac{1}{17}$ অংশ জল টানিয়া লইলে, কতগুলি ইট জলের মধ্যে নিক্ষেপ করা হইয়াছিল নির্ণয় কর।

21. 9 ফুট দীর্ঘ একখানি কড়ির ওজন $3\frac{1}{2}$ হন্দর। প্রতি ঘনফুট কড়ির ওজন 32 পাউণ্ড। যদি কড়ির এক প্রান্তের ছিন্ন তল বর্গাকার হয়, তবে কড়ির বেধ কত ?

22. $\frac{1}{2}$ ইঞ্চি পুরু তক্তা দ্বারা নির্মিত ডালা সমেত একটি বাক্সের বহির্দেশের মাপে দৈর্ঘ্য, বিস্তার ও উচ্চতা যথাক্রমে 26 ইঞ্চি, 19 ইঞ্চি ও 18 ইঞ্চি। প্রতি ঘনফুট কাষ্ঠের ওজন 40 পাউণ্ড হইলে, বাক্সটির ওজন কত ?

সমকোণী প্রিজ্‌ম (Right Prism)

5. দুইটি সর্বসম সমান্তরাল ঋজুরেখক্ষেত্র এবং তিন বা ততোধিক আয়তক্ষেত্র দ্বারা পরিবেষ্টিত ঘনককে সমকোণী প্রিজ্‌ম (Right prism) বলে। উক্ত সর্বসম সমান্তরাল ঋজুরেখক্ষেত্র দুইটিকে ধার বা প্রান্ত (end) বলা হয়। ধার বা প্রান্তকে ভূমিও (base) বলা হয়।

প্রথম চিত্র

ধার ব্যতীত সমকোণী প্রিজ্‌মের তলপরিমাণ

= ধার বা ভূমির পরিসীমা × উচ্চতা।

প্রিজ্‌মের সমস্ত তলপরিমাণ

= ভূমির পরিসীমা × উচ্চতা + ভূমির ক্ষেত্রফলের দ্বিগুণ।

প্রিজ্‌মের ঘনফল = ভূমির ক্ষেত্রফল × উচ্চতা।

প্রথম চিত্রে (*i*) প্রিজ্‌মের সমস্ত তলপরিমাণ

$= (AB + BC + AC) \times DA + ABC$ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলের দ্বিগুণ।

দ্বিতীয় চিত্রে প্রিজ্‌মের সমস্ত তলের পরিমাণ

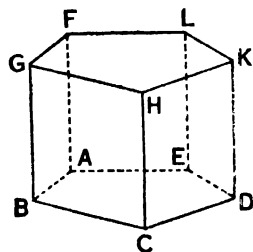
$= (AB + BC + CD + DE + AE) \times FA$

$+ ABCDE$ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের দ্বিগুণ।

প্রথম চিত্রে (*ii*) প্রিজ্‌মের ঘনফল

$= ABC$ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $\times DA$.

দ্বিতীয় চিত্রে প্রিজ্‌মের ঘনফল

$= ABCDE$ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $\times FA$

দ্বিতীয় চিত্র

উদা. 1. কোন সমকোণী প্রিজমের ভূমির বাহু তিনটির দৈর্ঘ্য 2 ফুট 2 ইঞ্চি, 2 ফুট 4 ইঞ্চি ও 2 ফুট 6 ইঞ্চি এবং উচ্চতা 10 ফুট ; উহার সমস্ত তলের পরিমাণ এবং ঘনফল নির্ণয় কর।

এস্থলে ভূমির পরিসীমা $= (26 + 28 + 30)$ ইঞ্চি $= 84$ ইঞ্চি

অর্ধ পরিসীমা $= (84 \div 2)$ ইঞ্চি $= 42$ ইঞ্চি

উচ্চতা $= 10$ ফুট $= 120$ ইঞ্চি

ভূমির ক্ষেত্রফল $= \sqrt{42 \times (42-26) \times (42-28) \times (42-30)}$ ব. ই.

$= \sqrt{42 \times 16 \times 14 \times 12}$ ব. ই.

$= \sqrt{14 \times 3 \times 4 \times 4 \times 14 \times 3 \times 2 \times 2}$ ব. ই.

$= 14 \times 3 \times 4 \times 2$ ব. ই. $= 336$ ব. ই.।

সমস্ত তলের পরিমাণ = ভূমিব পরিসীমা × উচ্চতা + ভূমির ক্ষেত্রফলের দ্বিগুণ

$= (84 \times 120 + 336 \times 2)$ ব. ই. $= 10752$ ব. ই.

$= 74\frac{2}{3}$ ব. ফু. $= 74$ বর্গ ফু. 96 ব. ই.

ঘনফল = ভূমির ক্ষেত্রফল × উচ্চতা $= 336 \times 120$ ঘ. ই.

$= \frac{336 \times 120}{12 \times 12 \times 12}$ ঘ. ফু. $= \frac{70}{3}$ ঘ. ফু. $= 23$ ঘ. ফু. 576 ঘ. ই.

উদা. 2 একটি সমকোণী প্রিজ্‌মের ভূমি 25 ইঞ্চি, 39 ইঞ্চি এবং 40 ইঞ্চি দীর্ঘ বাহু বিশিষ্ট একটি ত্রিভুজ। প্রিজ্‌মের ঘনফল $19\frac{1}{2}$ ঘন ফুট ; উচ্চতা কত ?

ভূমির পরিসীমা $= (25 + 39 + 40)$ ই. $= 104$ ই. $\therefore$ অর্ধ পরিসীমা $= 52$ ই.

$\therefore$ ভূমির ক্ষেত্রফল $= \sqrt{52 \times (52-25)(52-39)(52-40)}$ ব. ই.

$= \sqrt{52 \times 27 \times 13 \times 12}$ ব. ই.

$= \sqrt{13 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 13 \times 2 \times 2 \times 3}$ ব. ই.

$= 13 \times 2 \times 3 \times 3 \times 2$ ব. ই.

$= \frac{13 \times 6 \times 6}{12 \times 12}$ বর্গ ফুট $= \frac{13}{4}$ বর্গ ফুট।

$\therefore$ সমকোণী প্রিজ্‌মের উচ্চতা $= (19\frac{1}{2} \div \frac{13}{4})$ ফুট

$= \frac{39}{2} \times \frac{4}{13}$ ফুট $= 6$ ফুট।

প্রশ্নমালা 2

1. একটি সমকোণী প্রিজ্‌মের উচ্চতা 15 ফুট এবং ভূমি 6 ফুট, 8 ফুট, 10 ফুট বাহু বিশিষ্ট একটি ত্রিভুজ। ইহার ঘনফল এবং সমগ্র তলপরিমাণ নির্ণয় কর।

2. সমকোণী প্রিজ্‌মের ভূমি একটি ত্রিভুজ যাহার বাহু তিনটির পরিমাণ যথাক্রমে $6\frac{1}{2}$ ইঞ্চি, 7 ইঞ্চি, $7\frac{1}{2}$ ইঞ্চি। প্রিজ্‌মের উচ্চতা 10 ইঞ্চি হইলে. উহার ঘনফল এবং সমগ্র তলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

3. কোন সমকোণী প্রিজ্‌মের উচ্চতা 3 ফুট এবং ভূমি একটি ত্রিভুজ যাহার বাহু তিনটির দৈর্ঘ্য 13 ইঞ্চি, 30 ইঞ্চি ও 37 ইঞ্চি। ইহার ঘনফল, ধার ব্যতীত তলপরিমাণ এবং সমগ্র তলপরিমাণ নির্ণয় কর।

4. কোন সমকোণী প্রিজ্‌মের ভূমি 3 ফুট, 4 ফুট এবং 5 ফুট বাহু বিশিষ্ট একটি ত্রিভুজ। প্রিজ্‌মের ঘনফল 120 ঘন ফুট হইলে, উহার উচ্চতা কত?

5. সমকোণী প্রিজ্‌মের সমগ্র তলপরিমাণ 360 বর্গ ফুট; ভূমির বাহু তিনটির দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 5, 12, 13 ফুট; প্রিজ্‌মের ঘনফল নির্ণয় কর।

6. কোন সমকোণী প্রিজ্‌মের সমগ্র তলপরিমাণ 6 ব. ফু. 56 ব. ই.। ইহার ভূমি একটি সমকোণী ত্রিভুজ যাহার অতিভুজ ভিন্ন অপর-বাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্য 1 ফু. 3 ইঞ্চি ও 8 ইঞ্চি। প্রিজ্‌মের উচ্চতা কত নির্ণয় কর।

7. কোন সমকোণী প্রিজ্‌মের ভূমি একটি 1 ফুট 3 ইঞ্চি বাহু বিশিষ্ট সুষম ষড়্‌ভুজ। উচ্চতা 5 ফুট হইলে, ইহার ধার ব্যতীত তল ছয়টির ক্ষেত্রফল কত?

8. 10 ফুট উচ্চ একটি থাম 1 ফুট বাহু বিশিষ্ট একটি সুষম অষ্টভুজের উপর অবস্থিত। প্রতি বর্গ ফুট 12 আনা দরে ইহার আটটি ধার রঞ্জিত করিবার ব্যয় কত?

9. কোন সমকোণী প্রিজ্‌মের উচ্চতা 1 ফুট এবং ইহার ভূমি একটি সমবাহু ত্রিভুজ যাহার প্রত্যেক বাহুর দৈর্ঘ্য 4 ইঞ্চি। ইহার ঘনফল কত নির্ণয় কর।

10. কোন সমকোণী প্রিজ্‌মের উচ্চতা 6 ফুট এবং ভূমি একটি ট্রাপিজিয়ম যাহার সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্য 3 ফুট 4 ইঞ্চি ও 4 ফুট 1 ইঞ্চি এবং সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের লম্বদূরত্ব 3 ফুট। ইহার ঘনফল নির্ণয় কর।

সমকোণী বেলন
(Right Circular Cylinder)

6. কোন আয়তক্ষেত্রের একটি বাহু স্থির রাখিয়া উহার চারিদিকে আয়তক্ষেত্রটিকে একটি পূর্ণ আবর্তন করাইলে যে ঘন উৎপন্ন হয় তাহাকে সমকোণী বেলন (Right circular cylinder) বলে।

একখণ্ড আয়তাকার কাগজ পাকাইয়া যদি এক ধার উহার বিপরীত ধারের সহিত মিলাইয়া ধরা যায়, তাহা হইলে কাগজখানির অপর বিপরীত ধার দুইটি দুইটি

সমান বৃত্তের পরিধি হইবে। এখন কাগজখানি দুই দিকে উন্মুক্ত একটি শূন্যগর্ভ বেলনের আকৃতি ধারণ করিবে এবং সমতল কাগজখানি বক্রতলে পরিণত হইবে। উন্মুক্ত বৃত্তাকার ধার দুইটি আবৃত করা হইলে একটি সমকোণী বেলন উৎপন্ন হইবে। তাহা হইলে সমকোণী বেলন দুইটি বৃত্তাকার ধার ও একটি বক্রতল দ্বারা সীমাবদ্ধ।

সমকোণী বেলনের ভূমির ব্যাসার্ধ r এবং উচ্চতা h হইলে, উহার

(*i*) **বক্রতলের ক্ষেত্রফল** $= 2\pi rh.$

(*ii*) **বৃত্তাকার ভূমির ক্ষেত্রফল** $= \pi r^2$

(*iii*) **সমগ্র তলের ক্ষেত্রফল** $= 2\pi rh + 2\pi r^2$

$$= 2\pi r(h+r)$$

(*iv*) **বেলনের ঘনফল = ভূমির ক্ষেত্রফল × উচ্চতা**

$$= \pi.r^2 \times h = \pi r^2 h.$$

উদা 1. একখানি সমকোণী বেলনের উচ্চতা 14 ইঞ্চি এবং ভূমির ব্যাসার্ধ $9\frac{1}{3}$ ইঞ্চি। ইহার সমগ্র তলের ক্ষেত্রফল এবং ঘনফল নির্ণয় কর। ($\pi = \frac{22}{7}$ ধর)

সমগ্র তলের ক্ষেত্রফল $= 2\pi r\ (h + r)$

$= 2.\ \frac{22}{7} \times \frac{28}{3}\ (14 + \frac{28}{3})$ বর্গ ইঞ্চি

$= \frac{176}{3} \times \frac{70}{3}$ বর্গ ইঞ্চি $= \frac{12320}{9}$ বর্গ ইঞ্চি

$= 1368\frac{8}{9}$ বর্গ ইঞ্চি।

ঘনফল $= \pi.r^2 h = \frac{22}{7} \times \frac{28}{3} \times \frac{28}{3} \times 14$ ঘন ইঞ্চি

$= \frac{34496}{9}$ ঘন ইঞ্চি $= 3832\frac{8}{9}$ ঘন ইঞ্চি।

উদা 2. একটি সমকোণী বেলনের উচ্চতা 10 ফুট, ইহার ভূমির পরিধি $3\frac{4}{5}$ ফুট ; উহার বক্রতলের ক্ষেত্রফল কত ? ($\pi = \frac{22}{7}$ ধর)

বক্রতলের ক্ষেত্রফল $= 2\ \pi\ rh$

= পরিধি × উচ্চতা

$= 3\frac{4}{5} \times 10$ বর্গ ফুট $= 38$ বর্গ ফুট।

উদা 3. একটি রোলারের দৈর্ঘ্য 5 ফুট এবং ব্যাস $4\frac{2}{3}$ ফুট ; রোলারটি কতবার আবর্তন করিলে উহা 1 একর পরিমিত জমির উপর দিয়া যাইবে ?

এস্থলে সমকোণী বেলনের উচ্চতা = 5 ফুট

এবং ভূমির ব্যাসার্ধ = $4\frac{2}{3}$ ফুট ÷ 2 = $2\frac{1}{3}$ ফুট = $\frac{7}{3}$ ফুট।

∴ বক্রতলের ক্ষেত্রফল = $2 \times \pi \times r \times h$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times \frac{7}{3} \times 5$ বর্গফুট

$= \frac{220}{3}$ বর্গফুট = $\frac{220}{27}$ বর্গগজ।

∴ রোলারটি প্রতি আবর্তনে যাইবে $\frac{220}{27}$ বর্গগজ

∴ 1 একর বা 4840 বর্গগজ যাইতে ইহাকে আবর্তন করিতে হইবে

$(4840 \div \frac{220}{27}) = \frac{4840 \times 27}{220} = 594$ বার।

প্রশ্নমালা 3

1. সমকোণী বেলনের বক্রতলের ক্ষেত্রফল, সমগ্র তলের ক্ষেত্রফল এবং ঘনফল নির্ণয় কর, যখন—

(*i*) ভূমির ব্যাসার্ধ 5 ইঞ্চি এবং উচ্চতা 7 ইঞ্চি ;

(*ii*) ভূমির ব্যাস 8 ইঞ্চি এবং উচ্চতা 1 ফুট 2 ইঞ্চি ;

(*iii*) ভূমির ব্যাস 12 ফুট এবং উচ্চতা 3 গজ 2 ফুট।

2. এক ঘন ইঞ্চি স্বর্ণ হইতে $38\frac{1}{2}$ ইঞ্চি দীর্ঘ একটি সমকোণী বেলনের আকারের তার প্রস্তুত করা হইল ; তারের ব্যাস কত ? (Utkal U. 1944)

3. একটি সমকোণী বেলনাকৃতি প্রস্তর-স্তম্ভের উচ্চতা 12 ফুট এবং ভূমির ব্যাস 3 ফুট 6 ইঞ্চি। প্রতি বর্গফুট 5 আনা হিসাবে প্রস্তর-স্তম্ভের বক্রতল পালিশ করিবার ব্যয় নির্ণয় কর।

4. একটি সমকোণী বেলনের ভূমির ব্যাস 10 ইঞ্চি এবং উহার বক্রতলের ক্ষেত্রফল 3 বর্গগজ 118 বর্গ ইঞ্চি। উহার উচ্চতা কত ?

5. উভয় প্রান্ত খোলা একটি সমকোণী বেলনের উচ্চতা 1 ফুট ; উহা 1 ইঞ্চি পুরু এবং উহার বহির্ব্যাস 10 ইঞ্চি হইলে, সমগ্র তলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

6. কত ঘনফুট মৃত্তিকা খনন করা হইলে 6 ফুট ব্যাস ও $38\frac{1}{2}$ ফুট গভীর একটি কূপ নির্মিত হইবে ?

7. সমকোণী বেলনাকৃতি নল দ্বারা কোন চৌবাচ্চা হইতে 1 ঘণ্টায় 9240 গ্যালন জল নিষ্কাশিত করা যায়। নল দিয়া জল যদি সমভাবে প্রতি মিনিটে 144 ফুট বেগে প্রবাহিত হয়, তবে নলের অন্তর্ব্যাসার্ধ কত? 1 ঘনফুট $= 6\frac{1}{4}$ গ্যালন।

(Utkal U. 1950)

8. সমকোণী বেলনাকৃতি একটি নলের ব্যাস 2·2 ইঞ্চি। ইহা দ্বারা প্রতি মিনিটে 720 ফুট বেগে জল প্রবাহিত হয়। $5\frac{1}{2}$ ফুট দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও বেধ বিশিষ্ট একটি ঘনকাকৃতি চৌবাচ্চা পূর্ণ করিতে কত সময় লাগিবে?

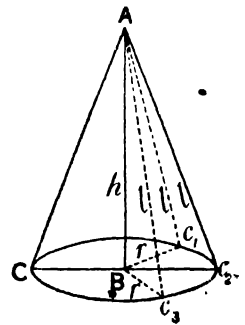
9. সমকোণী বেলনাকৃতি কোন জলাধারের উচ্চতা $12\frac{1}{2}$ ফুট এবং ইহাতে 110 হন্দর জল ধরে। 1 ঘনফুট জলের ওজন 1000 আউন্স হইলে, জলাধারের ভূমির ব্যাস নির্ণয় কর।

10. সমকোণী বেলনাকৃতি 1 ইঞ্চি পুরু একটি লোহার নলেব দৈর্ঘ্য 6 ফুট এবং ইহার ভূমির বহির্ব্যাস 1 ফুট 10 ইঞ্চি। নলটিতে কত ঘনফুট লোহা আছে নির্ণয় কর।

(Right Circular Cone)

7. কোন সমকোণী ত্রিভুজের একটি বাহুকে স্থির রাখিয়া উহার উপর উহাকে একটি পূর্ণ আবর্তন করাইলে অতিভুজ যে ঘন উৎপন্ন করে উহাকে শঙ্কু (Right circular cone) বলে।

যে বাহুকে স্থির রাখিয়া সমকোণী ত্রিভুজটিকে আবর্তন করান হইয়াছে উহা হইবে শঙ্কুর উচ্চতা, অপর বাহু হইবে বৃত্তাকার ভূমির ব্যাসার্ধ এবং অতিভুজ হইবে তির্যক্ (slant height)।

শঙ্কুর উচ্চতা h, তির্যক্ l এবং ভূমির ব্যাসার্ধ r হইলে, উহার

(i) **বক্রতলের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times$ ভূমির পরিধি $\times$ তির্যক্**

$$= \frac{1}{2} \times 2\pi . r \times l$$
$$= \pi r l.$$

(ii) **সমগ্র তলের ক্ষেত্রফল = বক্রতলের ক্ষেত্রফল + ভূমির ক্ষেত্রফল**

$$= \pi r l + \pi r^2$$

$$= \pi r(l + r)$$

(iii) **শঙ্কুর ঘনফল $= \frac{1}{3} \times$ ভূমির ক্ষেত্রফল $\times$ উচ্চতা**

$$= \frac{1}{3} \times \pi r^2 \times h$$

$$= \frac{1}{3} \pi r^2 h.$$

উদা. 1. কোন শঙ্কুর উচ্চতা 12 ফুট এবং ভূমির ব্যাসার্ধ 5 ফুট। ইহার (1) বক্রতলের ক্ষেত্রফল, (2) সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল এবং (3) ঘনফল নির্ণয় কর।

($\pi = \frac{22}{7}$ ধর)

উচ্চতা = 12 ফুট এবং ব্যাসার্ধ 5 ফুট, $\therefore$ তির্যক্ $= \sqrt{12^2 + 5^2}$

$= \sqrt{169} = 13$ ফুট.

$\therefore$ (1) বক্রতলের ক্ষেত্রফল $= \frac{22}{7} \times 5 \times 13$ বর্গফুট $= \frac{1430}{7}$ বর্গ ফুট

$= 204\frac{2}{7}$ বর্গ ফুট।

(2) সমগ্র তলের ক্ষেত্রফল $= \frac{22}{7} \times 5(13 + 5)$ বর্গ ফুট

$= \frac{1980}{7}$ বর্গ ফুট $= 282\frac{6}{7}$ বর্গ ফুট

(3) ঘনফল $= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times (5 \times 5) \times 12$ ঘন ফুট

$= \frac{2200}{7}$ ঘন ফুট $= 314\frac{2}{7}$ ঘন ফুট।

প্রশ্নমালা 4

1. শঙ্কুর বক্রতলের ক্ষেত্রফল ও সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর, যখন—

(*i*) ভূমির ব্যাসার্ধ 7 ইঞ্চি এবং তির্যক্ 1 ফুট 4 ইঞ্চি ;

(*ii*) ভূমির ব্যাসার্ধ 1 ফুট এবং তির্যক্ 1 ফুট 2 ইঞ্চি ;

(*iii*) ভূমির ব্যাসার্ধ 1 ফুট 9 ইঞ্চি এবং উচ্চতা 4 ফুট ;

(*iv*) তির্যক্ 7 ফুট এবং উচ্চতা 4·2 ফুট।

2. শঙ্কুর ঘনফল নির্ণয় কর, যখন—

(*i*) ভূমির ব্যাস 1 ফুট 2 ইঞ্চি এবং উচ্চতা 6 ইঞ্চি ;

(*ii*) ভূমির ব্যাস 3 ফুট এবং উচ্চতা 1 ফুট 9 ইঞ্চি ;

(*iii*) তির্যক্ 10 ইঞ্চি এবং ব্যাস 12 ইঞ্চি ;

(*iv*) তির্যক্ 3 ফুট 1 ইঞ্চি এবং ব্যাসার্ধ 2 ফুট 11 ইঞ্চি।

3. একটি শঙ্কুর ঘনফল 264 ঘন ইঞ্চি এবং উচ্চতা 7 ইঞ্চি ; ভূমির ব্যাস কত ?

4. একটি শঙ্কুর ঘনফল 453·75 ঘন ইঞ্চি এবং ভূমির ব্যাস 15 ইঞ্চি ; উচ্চতা কত ?

5. একটি শঙ্কুর বক্রতলের ক্ষেত্রফল 440 ঘন ইঞ্চি এবং ভূমির ব্যাস 20 ইঞ্চি ; তির্যক্ কত ?

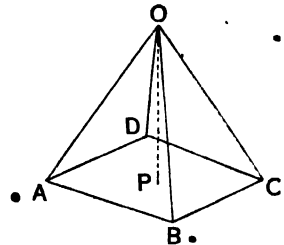
6. একটি শঙ্কুর উচ্চতা 6 ইঞ্চি এবং ভূমির ব্যাস 9 ইঞ্চি। সোনার পাতলা চাদর দিয়া ইহা সম্পূর্ণভাবে আবৃত করিতে হইলে, কত বর্গ ইঞ্চি চাদরের প্রয়োজন ?

7. প্রতি বর্গগজ 2 টাকা 3 আনা দরের ত্রিপল দিয়া একটি শঙ্কু-আকৃতির তাঁবু প্রস্তুত করিতে কত ব্যয় পড়িবে, যদি উহার উচ্চতা 12 ফুট এবং ভূমির ব্যাস 18 ফুট হয় ?

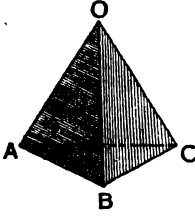
8. একটি শঙ্কুর ভূমির ক্ষেত্রফল বক্রতলের ক্ষেত্রফলের $\frac{8}{15}$; উহার তির্যক্ 11·25 ফুট হইলে, ভূমির ব্যাস কত ?

পিরামিড (Pyramid)

8. **পিরামিড**। যে ঘনক্ষেত্রের ভূমি একটি ঋজুরেখক্ষেত্র এবং অপর ত্রিভুজাকার ধারগুলি কোন বিন্দুতে পরস্পর মিলিত হয় তাহাকে পিরামিড বলে।

পিরামিডের ভূমি ভিন্ন অপর ধারগুলি যে বিন্দুতে মিলিত হয় তাহাকে উহার শীর্ষ (vertex) বলা হয়। পাশের চিত্রে O শীর্ষ, ABCD ভূমি এবং OAB, OBC, OCD এবং ODA ত্রিভুজ চারিটি পিরামিডের পার্শ্ব-তল। শীর্ষ হইতে ভূমির লম্বদূরত্বকে পিরামিডের উন্নতি (height) বলা হয়।

পিরামিডের পার্শ্বতলগুলি সমান সমদ্বিবাহু ত্রিভুজাকার হইলে, ভূমি একটি সুষম ঋজুরেখক্ষেত্র হইবে এবং ঐ পিরামিডকে তখন বলা হইবে সুষম (Regular).

পিরামিডের ভূমি ত্রিভুজাকার হইলে উহাকে ত্রিভুজ-পিরামিড (Triangular Pyramid), চতুর্ভুজাকার হইলে উহাকে চতুর্ভুজ-পিরামিড (Quadrilateral

Pyramid) এবং বহুভুজাকার হইলে উহাকে বহুভুজ পিরামিড (Polygonal Pyramid) বলা হয়।

ত্রিভুজাকার ভূমির উপর অবস্থিত পিরামিডকে Tetrahedronও বলা হয়। OABC একটি Tetrahedron.

কোন পিরামিডের ভূমি সুষম বহুভুজ হইলে এবং ঐ বহুভুজের পরিবৃত্তের কেন্দ্র হইতে ভূমিতলের উপর অঙ্কিত লম্বের উপর পিরামিডের শীর্ষ অবস্থিত হইলে উহাকে Right পিরামিড বলা হয়।

পিরামিডের ঘনফল = $\frac{1}{3}$ (ভূমির ক্ষেত্রফল) × উন্নতি।

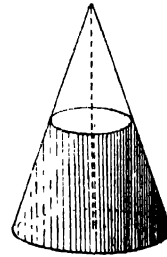
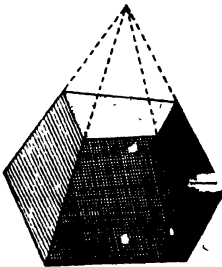
Volume of a Pyramid = $\frac{1}{3}$ (area of the base) × height.

পিরামিডের তির্যকতলের ক্ষেত্রফল ত্রিভুজাকার পার্শ্বতলের ক্ষেত্রফলের সমষ্টির সমান। উক্ত সমষ্টির সহিত ভূমির ক্ষেত্রফল যোগ করিলে যোগফল সমগ্রতলের ক্ষেত্রফলের সমান।

Right পিরামিডের সমস্ত তির্যক্‌তলের ক্ষেত্রফল

= $\frac{1}{2}$ (ভূমির পরিসীমা) × তির্যক্ উন্নতি।

[শীর্ষ হইতে ত্রিভুজাকার পার্শ্বতলের উন্নতিকে তির্যক্ উন্নতি (Slant height) বলা যায়।]

দ্রষ্টব্য। শঙ্কু বা পিরামিডের কোন অংশ ভূমির সমান্তরাল কোন সমতল দ্বারা ছিন্ন হইলে ভূমির উপরিস্থিত অবশিষ্ট অংশকে পিরামিড বা শঙ্কুর Frustum

বলা হয়। পিরামিড বা শঙ্কুর ভূমি এবং ভূমির সমান্তরাল কোন সমতলের মধ্যবর্তী অংশই Frustum.

প্রশ্নমালা 5

1. 16 ফুট, 11 ফুট এবং 9 ফুট বাহুবিশিষ্ট একটি ত্রিভুজাকার ভূমির উপর অবস্থিত এবং 10 $\sqrt{7}$ ফুট উন্নতি বিশিষ্ট পিরামিডের ঘনফল নির্ণয় কর।

2. 10 ফুট বাহুবিশিষ্ট বর্গাকার ভূমির উপর 12 ফুট উচ্চ পিরামিডের ঘনফল এবং তির্য্যকতলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

3. 10 ফুট বাহুবিশিষ্ট বর্গাকার ভূমির উপর 10 ফুট উচ্চপিরামিডের ঘনফল নির্ণয় কর।

4. 12 ফুট এবং 10 ফুট বাহুবিশিষ্ট আয়তাকার ভূমির উপর অবস্থিত 16 ফুট উচ্চ পিরামিডের ঘনফল নির্ণয় কর।

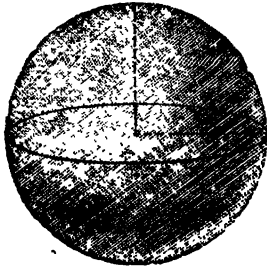
5. কোন বর্গ পিরামিডের (Square Pyramid) ঘনফল 640 ঘনফুট; উহার ভূমি 8 ফুট বর্গ হইলে, পিরামিডের উন্নতি কত ?

6. কোন পিরামিডের ভূমি আয়তাকার যাহার দৈর্ঘ্য 24 cm. এবং প্রস্থ 18 cm. এবং উহার তির্যক ধার 17 cm. পিরামিডের উচ্চতা এবং ঘনফল নির্ণয় কর। [Nag. '47]

7. 16 cm. বাহুবিশিষ্ট বর্গাকার ভূমির উপর 15 cm. উচ্চ একটি পিরামিডের উপরের অংশ ভূমির সমান্তরাল এবং অক্ষের মধ্যবিন্দুগামী একটি সমতল দ্বারা কর্তিত হইলে, পিরামিডের অবশিষ্ট নিম্ন অংশের ঘনফল কত হইবে ?

8. 12 cm. এবং 9 cm. সন্নিহিত বাহুবিশিষ্ট আয়তাকার ভূমির উপর দণ্ডায়মান কোন পিরামিডের তির্যক্ ধারের দৈর্ঘ্য 8·5 cm. পিরামিডের উচ্চতা এবং ঘনফল নির্ণয় কর (Gauhati '48)

গোলক (Sphere)

9. কোন বৃত্তের ব্যাসকে স্থির রাখিয়া ঐ ব্যাসের উপর বৃত্তকে ঘুরাইয়া আনিলে একটি পূর্ণ আবর্তনে যে ঘন উৎপন্ন হয় উহাকে **গোলক (sphere)** বলে।

একটি বক্রতল দ্বারা কোন ঘন যদি এরূপভাবে পরিবেষ্টিত হয় যে বক্রতলের সমস্ত বিন্দুই উক্ত ঘনের মধ্যস্থিত কোন নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে সমদূরবর্তী হয়, তাহা হইলে উক্ত ঘনকে গোলক বলা হয় এবং উক্ত নির্দিষ্ট বিন্দুকে গোলকের কেন্দ্র (centre) বলা হয়।

গোলকের তলের ক্ষেত্রফল $= 4\pi r^2$.

গোলকের ঘনফল $= \frac{4}{3}\pi r^3$

উদা. 1. পৃথিবীর ব্যাসার্ধ 4000 মাইল। ইহাকে একটি সম্পূর্ণ গোলক মনে করিয়া ইহার ঘনফল এবং তলের পরিমাণ নির্ণয় কর।

ঘনফন $= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 4000 \times 4000 \times 4000$ ঘন মাইল

$= \frac{5632000000000}{21}$ ঘন মাইল।

$= 268190476190\frac{10}{21}$ ঘন মাইল।

তলের ক্ষেত্রফল $= 4 \times \frac{22}{7} \times 4000 \times 4000$ বর্গ মাইল

$= \frac{1408000000}{7}$ বর্গ মাইল $= 201142857\frac{1}{7}$ বর্গ মাইল।

উদা. 2. প্রতি ঘনফুট ইস্পাতের ওজন 6 মণ 16 সের হইলে, $\frac{1}{8}$ ইঞ্চি ব্যাসার্ধ-বিশিষ্ট 4536-টি ইস্পাতের গুলির ওজন কত ?

4536-টি গুলির ঘনফল $= 4536 \times \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times \frac{1}{8} \times \frac{1}{8} \times \frac{1}{8}$ ঘন ইঞ্চি

$= \frac{4536 \times 4 \times 22}{3 \times 7 \times 8 \times 8 \times 8 \times 12 \times 12 \times 12}$ ঘন ফুট

$= \frac{[illegible] 11}{8 \times 8 \times 12 \times 2}$ ঘন ফুট

প্রতি ঘন ফুট ইস্পাতের ওজন $= 6$ মণ 16 সের

$= 256$ সের

$\therefore$ 4536-টি গুলির ওজন $= \frac{3 \times 11 \times 256}{8 \times 8 \times 12 \times 2}$ সের

$= \frac{11}{2}$ সের $= 5\frac{1}{2}$ সের

প্রশ্নমালা 6

1. 7 ইঞ্চি, 1 ফুট 2 ইঞ্চি, 3·5 ইঞ্চি ও 4·2 ইঞ্চি ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট গোলক সমূহের তলের ক্ষেত্রফল এবং ঘনফল নির্ণয় কর।

2. একটি গোলকের ঘনফল 310464 ঘন ইঞ্চি ; ইহার ব্যাস কত ? ইহার তলের ক্ষেত্রফল কত ?

3. প্রতি ঘনফুট ইস্পাতের ওজন 256 সের হইলে, $\frac{1}{2}$ ইঞ্চি ব্যাস বিশিষ্ট 189 গ্রোস ইস্পাতের গুলির ওজন কত ?

4. শূন্যগর্ভ একটি লৌহ গোলকের বহির্ব্যাস ও অন্তর্ব্যাসের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 14 ইঞ্চি ও 10 ইঞ্চি ; 1 ঘনফুট লৌহের ওজন 480 পাউণ্ড হইলে, গোলকটির ওজন কত ?

5. 14 ইঞ্চি ব্যাস বিশিষ্ট একটি সীসকের গোলক হইতে $\frac{1}{2}$ ইঞ্চি ব্যাস বিশিষ্ট কতগুলি গুলি প্রস্তুত করা যাইতে পারে ?

6. 3 ফুট 6 ইঞ্চি ব্যাসের একটি অর্ধ গোলকের ঘনফল এবং সমগ্র তলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

7. পৃথিবী ও চন্দ্রের ব্যাসের অনুপাত 100 : 27 ; উহাদের ঘনফলের অনুপাত কত ?

8. 6 সে. মি., 8 সে. মি. এবং 10 সে. মি. ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট তিনটি ধাতু নির্মিত গোলক গালাইয়া একটি গোলক প্রস্তুত করা হইল। এই গোলকের ব্যাসার্ধ কত ?

প্রশ্নমালা (বিবিধ) 7

1. Find the number of gallons of water a cistern measuring inside 3 ft. by 2 ft. 6 in. by 7 ft. will hold when full ; find also the weight of the contents, having given 1 pint equals 34·7 cu.in. and that the weight of a gallon of water is 10 lbs. (C. U. 1914)

কোন চৌবাচ্চার দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও বেধ যথাক্রমে 3 ফুট, 2 ফুট 6 ই. এবং 7 ফুট হইলে, উহাতে কত জল ধরিবে এবং উহার ওজন কত হইবে, যদি 1 pint = 34·7 ঘন ইঞ্চি এবং এক গ্যালন্ জলের ওজন 10 পাউণ্ড হয়।

2. A hollow cylinder of height 11·5 cm. external radius 5·3 cm. and internal radius 3·8 cm. is melted down and cast into a solid cylinder of height 7·3 cm. Calculate the radius of the solid cylinder correct to the nearest mm. (L. C. C.)

একটি ফাঁপা সমকোণী বেলনের উচ্চতা 11·5 cm. এবং বহির্ব্যাসার্ধ 5·3 cm. এবং অন্তর্ব্যাসার্ধ 3·8 cm.। উহাকে গালাইয়া 7·3 c.m. উচ্চতা বিশিষ্ট একটি ঘন বেলনে পরিণত করা হইল। আসন্ন মিলিমিটারে ঘন বেলনের ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর।

3. A plot of land has the shape formed by a square having a semicircle about each of the four sides as diameter. If the length of the side of the square be 60 ft., calculate the amount of rent realisable when the plot is let out at Rs. 1100 an acre per annum. (C. U. 1955)

বর্গাকার একখণ্ড জমির চারি বাহুর উপর অর্ধবৃত্তাকার চারি খণ্ড জমি আছে। বর্গাকার অংশের বাহুর দৈর্ঘ্য 60 ফুট। প্রতি একরের বার্ষিক খাজনা 1100 টাকা হইলে ঐ জমির মোট খাজনা কত হইবে ?

4. A cylindrical shell of height 12 ft., is open at both ends and its internal and external radii are 1 ft. and 10 inches respectively. Find the outer curved surface of the shell and its weight, if the material composing it weighs $3\frac{1}{2}$ lbs. per cubic foot. (C. U. '53)

সমকোণী বেলনের আকারের একটি সেলের উচ্চতা 12 ফুট এবং উভয় মুখ খোলা। উহার অন্তর্ব্যাসার্ধ এবং বহির্ব্যাসার্ধ যথাক্রমে 1 ফুট এবং 10 ইঞ্চি। উহার বহিঃস্থ বক্রতলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। যদি প্রতি ঘন ফুটের ওজন $3\frac{1}{2}$ পাউণ্ড হয় তাহা হইলে সেলটির ওজন কত ?

5. Find the volume of the pyramid of which the base is a triangle, whose sides are 8 cm., 15 cm. and 17 cm. and the height is 12 cm. (C. U. '46, '48)

8 cm., 15 cm. এবং 17 cm., বাহু বিশিষ্ট ত্রিকোণাকার ভূমির উপর অবস্থিত এবং 12 c.m. উচ্চতা বিশিষ্ট পিরামিডের ঘনফল নির্ণয় কর।

6. Three solid golden spherical beads of radii 3, 4 and 5 millimeters are melted into one single solid spherical bead. Find the radius of the single spherical bead. (C. U. '44)

3, 4 ও 5 মিলিমিটার ব্যাসার্ধের তিনটি স্বর্ণ গোলক গালাইয়া একটি গোলকে পরিণত করা হইল। নূতন গোলকটির ব্যাসার্ধ কত ?

7. A right prism stands on a triangular base whose sides are 17 cm., 10 cm. and 9 cm and the height is 10 cm. Find the volume and the surface (C. U. '40)

17 cm, 10 cm. এবং 9 cm. বাহু বিশিষ্ট ত্রিকোণাকার ভূমির উপর দণ্ডায়মান একটি সমকোণী প্রিজমের উচ্চতা 10 cm. উহার ঘনফল এবং সমগ্র তলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

8. A right pyramid stands on a square base of side 12 ft. Find the height of the pyramid if its volume is 576 cu. ft. (Cal. '43)

12 ফুট ধার বিশিষ্ট বর্গাকার ভূমির উপর অবস্থিত কোন পিরামিডের ঘনফল 576 ঘনফুট। উহার উচ্চতা কত ?

9. The volume of a sphere is twice the area of its surface. Find the radius of the sphere. (Cal. '53)

কোন গোলকের ঘনফল উহার তলের ক্ষেত্রফলের দ্বিগুণ। গোলকের ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর।

10. If the area of the curved surface of a right circular cylinder be 120 sq in. and the volume is 300 cu. in., find the radius of the base and the height of the cylinder. (C. U. 1957]

কোন সমকোণী বেলনের বক্রতলের ক্ষেত্রফল 120 বর্গইঞ্চি এবং ঘনফল 300 ঘন ইঞ্চি। ভূমিতলের ব্যাসার্ধ এবং বেলনের উচ্চতা নির্ণয় কর।

11. কোন সমকোণী প্রিজমের উচ্চতা 8 ইঞ্চি এবং উহার ভূমি-তল সমদ্বিবাহু ত্রিভুজাকার যাহার সমান বাহুদ্বয়ের প্রত্যেকের দৈর্ঘ্য 5 ইঞ্চি এবং অপর বাহু 6 ইঞ্চি। ইহার পার্শ্বতল পরিমাণ এবং ঘনফল নির্ণয় কর। (C. U. 1958)

12. 1 cm., 6 cm. এবং 8 cm. ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট তিনটি কাচের গোলককে গালাইয়া একটি গোলকে পরিণত করা হইল। নূতন গোলকটির ব্যাসার্ধ কত ? (C. U. 1958)

স্থানাঙ্ক-জ্যামিতি

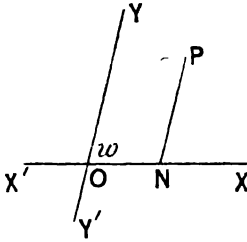
(Co-ordinate Geometry)

প্রথম অধ্যায়

একই সমতলস্থ কার্টিজিয়ান স্থানাঙ্ক

(Rectangular Cartesian co-ordinates in a plane)

1. স্থানাঙ্ক-জ্যামিতি (Co-ordinate Geometry)—গণিতের যে শাখাতে বীজগণিতের সাহায্যে জ্যামিতির আলোচনা করা হয় তাহাকে **স্থানাঙ্ক-জ্যামিতি (Co-ordinate Geometry)** বলা হয়। Co-ordinate Geometry-তে জ্যামিতি ও বীজগণিতের সমন্বয়।

2. স্থানাঙ্ক (Co-ordinates)। মনে কর একই সমতলে অবস্থিত xox' এবং yoy' দুইটি নির্দিষ্ট সরলরেখা পরস্পর O-বিন্দুতে লম্বভাবে ছেদ করিয়াছে। ঐ সমতলের কোন P-বিন্দু হইতে yoy' এর সমান্তরাল একটি সরলরেখা আঁক যাহা xox'-কে N বিন্দুতে ছেদ করে।

এখন ON এবং PN এর মান (magnitude) এবং উহাদের পরস্পরের সহিত অবনতি (direction) অর্থাৎ PNO কোণের পরিমাণ জানা থাকিলে P-বিন্দুর অবস্থান নির্ণয় করা যায়।

ON এবং PN-এর দৈর্ঘ্য মানকে P বিন্দুর স্থানাঙ্ক বলা হয়। ইহাদের ON-কে P বিন্দুর **ভুজ** (Abscissa) এবং PN-কে উহার **কোটি** (Ordinate) বলা হয়। ভুজকে x-স্থানাঙ্ক এবং কোটিকে y-স্থানাঙ্কও বলা হয়।

3. অক্ষ (Axis of co-ordinates) ও মূলবিন্দু (Origin). xox' এবং yoy' একই সমতলস্থ এই পরস্পরচ্ছেদী নির্দিষ্ট সরলরেখা দুইটি হইতে, উক্ত সমতলের যে কোন P বিন্দুর দূরত্ব পরিমাণ করা হয় বলিয়া উহাদিগকে **অক্ষ** (Axes of co-ordinates) বলা হয়।

xox'-কে x-axis (x-অক্ষ) এবং yoy'-কে y-axis (y-অক্ষ) বলা হয়। দুইটি অক্ষের ছেদ-বিন্দু O-কে **মূলবিন্দু (Origin)** বলা হয়।

P-বিন্দুর ভুজ-কোটি যথাক্রমে a ও b হইলে উহাদিগকে (a, b) এইরূপ সাংকেতিক দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

দার্শনিক Descartes-এর ভুজ-কোটি (co-ordinates) প্রণালীর আবিষ্কার দ্বারা জ্যামিতি ও বীজগণিতের মৌলিক সম্বন্ধ নির্ণয়ের পথ সুগম হইয়াছে বলিয়া তাঁহার নামানুসারে ইহাদিগকে Cartesian co-ordinates (কার্টিজের ভুজ-কোটি) বলা হয়।

4. তির্যক্ ও লম্বস্থানাঙ্ক (Oblique and Rectangular Co-ordinates) : কার্টিজের ভুজ-কোটি দ্বিবিধ—তির্যক্ (Oblique) এবং (Rectangular).

xox' এবং yoy'-এর অন্তর্ভুক্ত w-কোণ সমকোণ না হইলে, কোন বিন্দুর ভুজ-কোটিকে তির্যক্ ভুজ-কোটি (Oblique co-ordinates) এবং উক্ত কোণ সমকোণ হইলে উক্ত বিন্দুর ভুজ-কোটিকে লম্ব-স্থানাঙ্ক (Rectangular co-ordinates) বলা হয়।

দ্রষ্টব্য। এই পুস্তকে সর্বত্রই Rectangular Cartesian co-ordinates ব্যবহৃত হইবে।

5. পাদ (Quadrant), xox' এবং yoy' সমতলকে চারিটি অংশে বিভক্ত করে, উহাদের প্রত্যেক অংশকে **পাদ** (Quadrant) বলে।

xoy-কে প্রথম পাদ (First quadrant), yox'-কে দ্বিতীয় পাদ (Second quadrant), $x'oy'$ কে তৃতীয় পাদ (Third quadrant) এবং xoy' কে চতুর্থ পাদ (Fourth quadrant) বলা হয়।

6. ধনাত্মক ও ঋণাত্মক ভুজ-কোটি (Positive and negative co-ordinates). ভুজ-কোটি উভয়ই ধনাত্মক ও ঋণাত্মক হইতে পারে। yoy' এর ডানদিকে সমস্ত বিন্দুর ভুজ ধনাত্মক এবং বাঁ দিকে সমস্ত বিন্দুর ভুজ ঋণাত্মক।

xox' অক্ষের উপরে সমস্ত বিন্দুর কোটি ধনাত্মক এবং নীচে সমস্ত বিন্দুর কোটি ঋণাত্মক।

$(-a, b)\cdot P$ $\cdot P(a, b)$

X′ O X

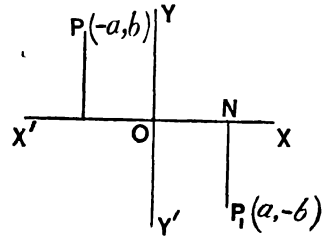
$(-a, -b)\cdot P$ $\cdot P(a, -b)$

মনে কর, P_1, P_2, P_3, P_4 এই চারিটি বিন্দু, যথাক্রমে প্রথম, দ্বিতীয়, তৃতীয় এবং চতুর্থ পাদে অবস্থিত।

প্রথম পাদে a, b উভয়ই ধনাত্মক,
দ্বিতীয় পাদে a, ঋণাত্মক, b ধনাত্মক,
তৃতীয় পাদে a ঋণাত্মক, b ঋণাত্মক
চতুর্থ পাদে a ধনাত্মক, b ঋণাত্মক।

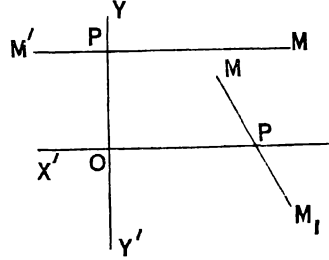
প্রথম পাদে ভুজ-কোটি উভয়ই ধনাত্মক বলিয়া প্রথম পাদকে ধনাত্মক পাদ (Positive quadrant) বলা হয়।

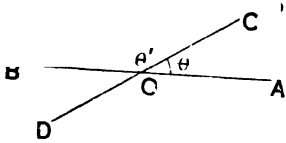
7. বিন্দুর অবস্থান নির্ণয় এবং বিন্দু স্থাপন। সমতলস্থ কোন বিন্দুর অবস্থান হইতে উহার ভুজ-কোটি নির্ণয় করা যায়। মনে কর সমতলস্থ P_1-বিন্দুর অবস্থান নির্ণয় করিতে হইবে। P_1 হইতে xox' এর উপর P_1N লম্ব টান। এখন, পূর্বোক্ত নিয়মানুসারে চিহ্ন সমেত P_1N এবং ON এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর ধর, $P_1N = b$, এবং $ON = a$

সুতরাং P_1 বিন্দুর ভুজ-কোটি $(a, -b)$ ইহাকে $P_1(a, -b)$ এই ভাবে লেখা হয়।

আবার মনে কর, $P(-a, b)$ বিন্দুটি সমতলে স্থাপন করিতে হইবে। OX' এর বরাবর a লও এবং তথা হইতে yy' এর সমান্তরাল b লও ; তাহা হইলে $P(-a, b)$ বিন্দুটি সমতলে স্থাপিত হইল।

দ্রষ্টব্য। প্রাথমিক Co-ordinate Geometry-এর আলোচনায় মাত্র বাস্তব (real) সংখ্যারই আলোচনা হইবে, ইহাতে (imaginary) সংখ্যার কোন স্থান নাই।

8. সরলরেখার ধনাত্মক ও ঋণাত্মক দিক্ (Positive and negative directions of a straight line).

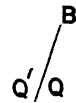
প্রত্যেক সরলরেখার দুইটি দিক্—ধনাত্মক এবং ঋণাত্মক। যদি কোন সরলরেখা x-অক্ষকে ছেদ করে তাহা হইলে x-অক্ষের উপরের দিক্ ধনাত্মক এবং নীচের দিক্ ঋণাত্মক, আর যদি উহা x-অক্ষের সহিত সমান্তরাল হয়, তাহা হইলে y-অক্ষের ডান দিক্ ধনাত্মক এবং বাঁ দিক্ ঋণাত্মক। চিত্রে, PM ধনাত্মক এবং PM′ ঋণাত্মক।

9. দুইটি সরলরেখার মধ্যবর্তী কোণ (The angle between one straight line and another).

দুইটি সরলরেখা পরস্পর ছেদ করিলে চারিটি কোণ উৎপন্ন হয়, উহাদের মধ্যে দুই দুইটি পরস্পর সমান। সুতরাং একটি সরলরেখা অপর একটি সরলরেখার সহিত দুইটি কোণ উৎপন্ন করে যাহারা একটি অপরটির সম্পূরক। একটি সরলরেখা অপর একটি সরল-রেখার সহিত এই দুইটি কোণের যে কোন একটি কোণ উৎপন্ন করে এইরূপ বলা হয়।

সুতরাং এক সরলরেখা অপর সরলরেখার সহিত যে কোণ উৎপন্ন করে উহা ত্রিকোণমিতির ধনাত্মক কোণ, যাহা দ্বিতীয় সরলরেখা হইতে প্রথম সরলরেখার অন্তর্গত কোণ দ্বারা সূচিত হয়।

AB ও CD-র মধ্যবর্তী কোণ θ, কিন্তু CD ও AB-র মধ্যবর্তী কোণ θ'.

10. সরলরেখার নতি (Inclination and Slope).

কোন সরলরেখা x-অক্ষের সহিত যে কোণ উৎপন্ন করে তাহাকে উহার **নতি** (inclination) বলে।

চিত্রে, $\angle Q$, AB-র নতি (inclination) কিন্তু $\angle Q'$ নহে।

কোন সরলরেখার নতি-কোণের tangent কে ঐ সরলরেখার Slope বলা হয়।

Slope সাধারণতঃ m অক্ষর দ্বারা সূচিত হয়।

অনুশীলনী 1

1. ছক-কাগজে নিম্নলিখিত বিন্দুগুলি স্থাপন কর :

$(0, 0), (0, 3), (3, 0), (-2, -3), (5, -7), (-3, 5)$

2. ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর যাহার কৌণিক বিন্দু :

$(0, 0), (5, 6), (8, -3)$

3. চতুর্ভুজটি আঁক যাহার কৌণিক বিন্দু :

$(6, 0), (-2, 5), (-1, 7), (3, -4)$

4. মূলবিন্দুর স্থানাঙ্ক কত? y-অক্ষের উপর x-স্থানাঙ্ক এবং x-অক্ষের উপর y-স্থানাঙ্ক কত?

5. কোন সরলরেখা মূলবিন্দুতে দ্বিখণ্ডিত ; উহার এক প্রান্ত $(-P, Q)$ হইলে অপর প্রান্ত কত?

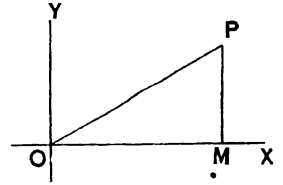
6. একটি বিন্দুর সঞ্চার পথ y-অক্ষের সমান্তরাল ; চল বিন্দুটির কোন্ স্থানাঙ্ক ধ্রুবক?

7. কোন আয়ত ক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্য 10 ও 8 এবং উহার কর্ণদ্বয়ের ছেদ বিন্দু $(3, 3)$ এবং যে বাহুর দৈর্ঘ্য 8, তাহা y-অক্ষের সমান্তরাল। কৌণিক বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

দ্বিতীয় অধ্যায়

দূরত্ব

1. মূলবিন্দু হইতে কোন বিন্দুর স্থানাঙ্কমূলক দূরত্ব (Distance of a given point from the origin in terms of the co-ordinates).

মনে কর XO এবং YO দুইটি অক্ষ পরস্পর লম্ব এবং P বিন্দুটি (x, y). P হইতে OX এর উপর PM লম্ব টান এবং OP যোগ কর।

তাহা হইলে OP সরলরেখা দ্বারা O হইতে P-এর দূরত্ব সূচিত হইবে।

P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y),

সুতরাং $OM = x$, এবং $PM = y$.

এখন, OP, POM সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ বলিয়া,

$$OP^2 = OM^2 + PM^2$$

$$\therefore \quad OP = \sqrt{OM^2 + PM^2}$$

অর্থাৎ $OP = \sqrt{x^2 + y^2}$

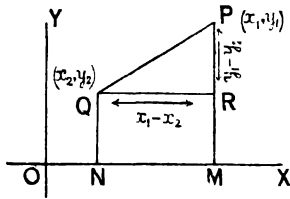
উদা. 1. মূলবিন্দু হইতে (*i*) (3, 4) (*ii*) (−12, 5) (*iii*) (5, 2) (*iv*) $(a+b, a-b)$ বিন্দু চারিটির দূরত্ব নির্ণয় কর।

(*i*) মূলবিন্দু হইতে (3, 4) বিন্দুর দূরত্ব $= \sqrt{3^2 + 4^2}$
$= \sqrt{25} = 5.$

(*ii*) মূলবিন্দু হইতে (−12, 5) বিন্দুর দূরত্ব $= \sqrt{(-12)^2 + 5^2}$
$= \sqrt{144 + 25}$
$= \sqrt{169} = 13.$

(*iii*) মূলবিন্দু হইতে (5, 2) বিন্দুর দূরত্ব $= \sqrt{5^2 + 2^2}$
$= \sqrt{29}.$

(*iv*) মূলবিন্দু হইতে $(a+b, a-b)$ বিন্দুর দূরত্ব $= \sqrt{(a+b)^2 + (a-b)^2}$
$= \sqrt{2(a^2 + b^2)}.$

2. দুইটি বিন্দুর স্থানাঙ্কমূলক দূরত্ব নির্ণয় (To find the distance between two points in terms of co-ordinates).

মনে কর, OX এবং OY অক্ষ-চিহ্নিত সমতলে $P(x_1, y_1)$ এবং $Q(x_2, y_2)$ দুইটি বিন্দু।

P ও Q-র দূরত্ব নির্ণয় করিতে হইবে। PM এবং QN, OX-এর উপর লম্ব অঙ্কিত কর এবং QR, PM-এর উপর লম্ব অঙ্কিত কর। তাহা হইলে,

$OM = x_1$, $ON = x_2$ $\qquad MN = QR = OM - ON = x_1 - x_2$

এবং $PM = y_1$ $QN = y_2$, $\qquad PR = PM - RM = PM - QN = y_1 - y_2$.

এখন, PQR সমকোণী ত্রিভুজে, $PQ^2 = QR^2 + PR^2$

$$= (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$$

$$\therefore \quad PQ = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

দ্রষ্টব্য। (*i*) $x_1, y_1, \ x_2, y_2$-এর ধনাত্মক, ঋণাত্মক সর্বপ্রকার মানেই উক্ত সূত্র প্রযোজ্য হইবে।

(*ii*) এই সূত্রে $x_2 = 0 = y_2$ মান বসাইলে Q, মূল বিন্দুর সহিত মিলিত হইবে এবং মূলবিন্দু হইতে P বিন্দুর দূরত্ব নির্ণীত হইবে, কারণ

$$PQ = \sqrt{(x_1 - 0)^2 + (y_1 - 0)^2}$$
$$= \sqrt{(x_1)^2 + (y_1)^2}$$

এখন Q বিন্দু, O-বিন্দুর সহিত মিলিত হইলে

$OP = \sqrt{(x_1)^2 + (y_1)^2}$ = মূলবিন্দু হইতে $P(x_1, y_1)$ বিন্দুর দূরত্ব।

উদা. 1: নিম্নলিখিত দুই দুই বিন্দুর দূরত্ব নির্ণয় কর :

(*i*) (4, 5), (1, 1) (*ii*) (–5, 0), (2, –7) (*iii*) (–5, –1), (1, 7)

(*iv*) $(a, b), (c, d)$ (*v*) (0, 0), $(m \cos \theta, m \sin \theta)$.

(i) ধর, (4, 5), (1, 1) বিন্দু দুইটির দূরত্ব $= d$

$$\therefore \quad d = \sqrt{(4-1)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

(ii) ধর $(-5, 0), (2, -7)$ বিন্দু দুইটির দূরত্ব $= d$

$\therefore \quad d = \sqrt{\{(-5)-2\}^2 + \{(0)-(-7)\}^2}$

$= \sqrt{(-7)^2 + 7^2} = \sqrt{49+49}$

$= \sqrt{98} = 7\sqrt{2}.$

(iii) ধর $(-5, -1), (1, 7)$ বিন্দু দুইটির দূরত্ব $= d$

$\therefore \quad d = \sqrt{\{(-5)-(1)\}^2 + \{(-1)-(7)\}^2}$

$= \sqrt{(-6)^2 + (-8)^2} = \sqrt{36+64}$

$= \sqrt{100} = 10.$

(iv) ধর $(a, b), (c, d)$ বিন্দু দুইটির দূরত্ব $= D$

$\therefore \quad D = \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}$

$= \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 2ac - 2bd}$

(v) ধর $(0, 0), (m \cos\theta, m \sin\theta)$ বিন্দু দুইটির দূরত্ব $= d$

$\therefore \quad d = \sqrt{(0 - m\cos\theta)^2 + (0 - m\sin\theta)^2}$

$= \sqrt{m^2\cos^2\theta + m^2\sin^2\theta}$

$= m.\sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta}$

$= m.1 = m.$

উদা. 2. প্রমাণ কর যে $(4, 3)$ এবং $(5, 0)$ বিন্দু দুইটি মূলবিন্দু হইতে সমদূরবর্তী।

মনে কর $P(4, 3)$ এবং $Q(5, 0)$

$\therefore \quad OP^2 = 4^2 + 3^2 = 25, \quad \therefore \quad OP = 5$

এবং $OQ^2 = 5^2 + 0^2 = 25 \quad \therefore \quad OQ = 5.$

$\therefore \quad OP = OQ,$

অর্থাৎ P এবং Q মূল বিন্দু হইতে সমদূরবর্তী।

উদা. 3. $(7, -3)$, এবং $(-5, 4)$ বিন্দু দুইটি হইতে (x, y) বিন্দুটি সমদূরবর্তী হইলে,

প্রমাণ কর যে, $24x - 14y - 17 = 0$.

(x, y) এবং $(7, -3)$ এর দূরত্ব

$= \sqrt{(x-7)^2 + (y+3)^2}$

$= \sqrt{x^2 - 14x + 49 + y^2 + 6y + 9}$

$= \sqrt{x^2 + y^2 - 14x + 6y + 58}$

(x, y) এবং $(-5,4)$-এর দূরত্ব

$$= \sqrt{(x+5)^2+(y-4)^2}$$
$$= \sqrt{x^2+10x+25+y^2-8y+16}$$
$$= \sqrt{x^2+y^2+10x-8y+41}$$

সুতরাং প্রশ্ন অনুসারে, $\sqrt{x^2+y^2-14x+6y+58}$
$$= \sqrt{x^2+y^2+10x-8y+41}$$

বা $x^2+y^2-14x+6y+58=x^2+y^2+10x-8y+41$

বা $-14x-10x+6y+8y+58-41=0$

বা $-24x+14y+17=0$

বা $24x-14y-17=0.$

উদা. 4. প্রমাণ কর যে $(4, 3)$ এবং $(8, 6)$ বিন্দু দুইটি এবং মূলবিন্দু সমরেখ (collinear).

মনে কর $P(4, 3)$ এবং $Q(8, 6)$

$OP^2=4^2+3^2=25 \quad \therefore \quad OP=5$

$PQ^2=(8-4)^2+(6-3)^2$

$=4^2+3^2=25, \quad \therefore \quad PQ=5$

$OQ^2=8^2+6^2=100 \quad \therefore \quad OQ=10$

$\therefore \quad OP+PQ=5+5=10=OQ$

অর্থাৎ $OP+PQ=OQ$

$\therefore$ O, P, Q সমরেখ।

অনুশীলনী 2

1. মূল বিন্দু হইতে নিম্নলিখিত বিন্দুগুলির দূরত্ব নির্ণয় কর :

(i) $(5, 12)$ (ii) $(4, 3)$ (iii) $(-4, -3)$ (iv) $(m+n, (m-n)$ (v) $(c \cos\theta, c\sin\theta)$.

2. নিম্নলিখিত দুই দুইটি বিন্দুর দূরত্ব নির্ণয় কর :

(i) $(3, -2), (-1, 1)$ (ii) $(8, 12), (-4, 7)$ (iii) $(26, 10), (2, 3)$ (iv) $(ax, bx), (by, ay)$.

3. দেখাও যে, (8, 8), (1, 4), (4, 1) বিন্দু তিনটি একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের কৌণিক বিন্দু।

4. (2, 3) এবং (−1, 2) হইতে (x, y) বিন্দুটি সমদূরবর্তী হইলে, প্রমাণ কর যে $3x + y - 4 = 0$.

5. প্রমাণ কর যে A(2, 4), B(2, 6) এবং C $(2 + \sqrt{3}, 5)$ বিন্দু তিনটি একটি সমবাহু ত্রিভুজের কৌণিক বিন্দু।

6. (m, n) এবং (n, m) বিন্দু দুইটি হইতে (x, y) বিন্দু সমদূরবর্তী হইলে, প্রমাণ কর যে $x = y$.

7. প্রমাণ কর যে, (3, 3) এবং (−4, −4) বিন্দু দুইটি মূল বিন্দুর সহিত সমরেখ।

8. প্রমাণ কর যে (−3, 4), (3, −4) এবং (−4, −3), (6, 4) এই দুই দুইটি বিন্দুগামী সরলরেখা মূল বিন্দুতে ছেদ করে।

9. $(x_1, 5)$ এবং (6, 3) বিন্দু দুইটির দূরত্ব $2\sqrt{5}$. x_1 এর মান নির্ণয় কর।

---

3. দুইটি বিন্দুর সংযোজক সরলরেখার উপর একটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করিতে হইবে যাহা উক্ত সরলরেখাকে কোন নির্দিষ্ট অনুপাতে বিভক্ত করে।

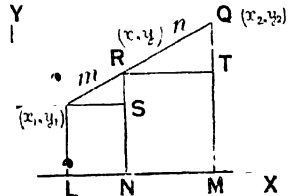
To find the co-ordinates of a point which divides the line joining two given points in a given ratio.

মনে কর প্রদত্ত বিন্দু দুইটি $P(x_1, y_1)$, এবং $Q(x_2, y_2)$; এবং R বিন্দু (x, y), PQ সরলরেখাকে $m : n$ অনুপাতে বিভক্ত করে।

(i) প্রথমতঃ মনে কর R, PQ-কে অন্তর্বিভক্ত করিয়াছে।

সুতরাং PR : RQ $= m : n$.

OX-এর উপর PL, QM, RN লম্ব টান।

PS এবং RT‖OX আঁক।

এখন, PL, RN, QM তিনটি সমান্তরাল সরলরেখাকে PQ এবং LM ছেদ করিয়াছে ;

$$\therefore \quad \text{LN} : \text{NM} = \text{PR} : \text{RQ} = m : n$$

কিন্তু, $\dfrac{\text{LN}}{\text{MN}} = \dfrac{\text{ON} - \text{OL}}{\text{OM} - \text{ON}} = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x} = \dfrac{m}{n}$

$$\therefore \quad nx - nx_1 = mx_2 - mx \quad \text{বা} \quad mx + nx = mx_2 + nx_1$$

$$\therefore \quad x = \frac{mx_2 + nx_1}{m+n}.$$

আবার PRS এবং RQT ত্রিভুজ দুইটি সদৃশকোণী,

$$\therefore \quad \frac{\text{RS}}{\text{QT}} = \frac{\text{PR}}{\text{RQ}} = \frac{m}{n}.$$

কিন্তু, $\dfrac{\text{RS}}{\text{QT}} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y} \quad \therefore \quad \dfrac{y - y_1}{y_2 - y} = \dfrac{m}{n}$

$$\therefore \quad ny - ny_1 = my_2 - my \quad \text{বা} \quad ny + my = my_2 + ny_1$$

$$\therefore \quad y = \frac{y_2 m + y_1 n}{m+n} = \frac{my_2 + ny_1}{m+n}.$$

$\therefore$ R বিন্দুর স্থানাঙ্ক $\dfrac{mx_2 + nx_1}{m+n}$ এবং $\dfrac{my_2 + ny_1}{m+n}$

$m = n$ হইলে, R, PQ-এর মধ্যবিন্দু হইবে,

সুতরাং PQ-র মধ্য বিন্দুর স্থানাঙ্ক (পূর্ব সূত্রে $m = n$ বসাইয়া)

$$x = \frac{mx_2 + nx_1}{m+n} = \frac{mx_2 + mx_1}{m+m} = \frac{m(x_2 + x_1)}{2m} = \frac{x_2 + x_1}{2}.$$

অনুরূপে, $y = \dfrac{y_2 + y_1}{2}.$

(ii) দ্বিতীয়তঃ, PQ সরলরেখাকে R বহিঃস্থভাবে $m : n$ অনুপাতে বিভক্ত করিলে, অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায় যে, R বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে,

$$\frac{mx_2 - nx_1}{m-n} \text{ এবং } \frac{my_2 - ny_1}{m-n}.$$

উদা. 1. (7, −4) এবং (−5, 6) বিন্দু দুইটির সংযোজক সরলরেখার মধ্য বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y) হইলে,

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{7 + (-5)}{2} = \frac{2}{2} = 1.$$

$$y = \frac{-4 + 6}{2} = \frac{2}{2} = 1.$$

∴ নির্ণেয় স্থানাঙ্ক **(1, 1).**

উদা. 2. P(−8, 6), Q(2, −4) বিন্দুর সংযোজক সরলরেখা PQ, R বিন্দুতে 2 : 3 অনুপাতে বিভক্ত হইয়াছে ; R-বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

এস্থলে, $\left.\begin{array}{l} x_1 = -8 \\ x_2 = 2 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} y_1 = 6 \\ y_2 = -4 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} m = 2k \\ n = 3k \end{array}\right\}$

এখন, R-বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y) হইলে,

$$x = \frac{mx_2 + nx_1}{m + n} = \frac{2k.2 + 3k.(-8)}{2k + 3k} = \frac{4k - 24k}{5k} = \frac{-20k}{5k} = -4.$$

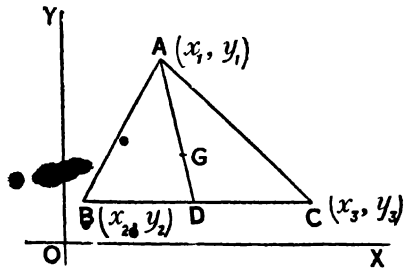
$$y = \frac{my_2 + ny_1}{m + n} = \frac{2k.(-4) + 3k.6}{2k + 3k} = \frac{-8k + 18k}{5k} = \frac{10k}{5k} = 2.$$

∴ নির্ণেয় স্থানাঙ্ক **(−4, 2)**

উদা. 3. ত্রিভুজের তিনটি কৌণিক বিন্দু যথাক্রমে (x_1, y_1), (x_2, y_2) (x_3, y_3). উহার ভর-কেন্দ্রের (centroid) স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

মনে কর, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ এবং $C(x_3, y_3)$.

তাহা হইলে, BC-এর মধ্যবিন্দু

$$D\left(\frac{x_2 + x_3}{2}, \frac{y_2 + y_3}{2}\right)$$

কিন্তু ভর-কেন্দ্র G মধ্যমাকে 2 : 1 অনুপাতে বিভক্ত করে।

সুতরাং AD সরলরেখা G বিন্দুতে 2 : 1 অনুপাতে বিভক্ত হইয়াছে। G বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y) হইলে,

$$x=\frac{2.\frac{x_2+x_3}{2}+1.x_1}{2+1}=\frac{x_1+x_2+x_3}{3}$$

$$y=\frac{2.\frac{y_2+y_3}{2}+1.y_1}{2+1}=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}$$

উদা. 4. প্রমাণ কর যে ত্রিভুজের তিনটি মধ্যমা সমবিন্দু। (C. U. 1920)

মনে কর ABC ত্রিভুজের $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ এবং $C(x_3, y_3)$ এবং AD, BC-এর উপর মধ্যমা যাহা $G(x, y)$ বিন্দুতে 2 : 1 অনুপাতে বিভক্ত হইয়াছে। সুতরাং G ঐ ত্রিভুজের ভর-কেন্দ্র।

D বিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{x_2+x_3}{2},\ \frac{y_2+y_3}{2}\right)$

এখন, G (x, y) বিন্দু AD সরলরেখাকে 2 : 1 অনুপাতে বিভক্ত করে,

$$\therefore\quad x=\frac{2.\frac{x_2+x_3}{2}+1.x_1}{2+1}=\frac{x_1+x_2+x_3}{3}$$

তদ্রূপ $y=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}$

অনুরূপ ভাবে, BE, CF মধ্যমা দুইটির প্রত্যেকটি 2 : 1 অনুপাতে বিভক্ত হইলে, বিভাগ বিন্দুর স্থানাঙ্ক উভয় স্থলে, $\frac{x_1+x_2+x_3}{3}$, $\frac{y_1+y_2+y_3}{3}$ হইবে।

ইহা হইতে স্পষ্টই বোঝা যায় যে $\frac{x_1+x_2+x_3}{3}$, $\frac{y_1+y_2+y_3}{3}$ বিন্দুটি AD, BE এবং CF তিনটি মধ্যমার উপরই অবস্থিত। সুতরাং ঐ বিন্দুটি উহাদের ছেদ বিন্দুতে অবস্থিত হইবে।

অতএব তিনটি মধ্যমা সমবিন্দু। উক্ত ছেদ বিন্দুটি G হইলে, উহা AD, BE এবং CF-এর প্রত্যেককে 2 : 1 অনুপাতে বিভক্ত করে।

ত্রিভুজের মধ্যমা তিনটির ছেদ বিন্দুকে ভর-কেন্দ্র (Centroid or medial point) বলে।

অনুশীলনী 3

1. নিম্নলিখিত দুই দুইটি বিন্দুর সংযোজক সরলরেখার মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর :

(i) $(2, 3), (4, -1)$ (ii) $(7, -4), (-5, 6)$ (iii) $(6, 5), (4, -1)$

(iv) $(\sqrt{2}+\sqrt{3}, \sqrt{3}), (-\sqrt{3}, 2-\sqrt{3})$

(v) $(a+b, a-b), (b-a, b+a)$

2. কোন ত্রিভুজের কৌণিক বিন্দুগুলি যথাক্রমে $(4, 5)$, $(6, -3)$, এবং $(-8, 1)$; প্রত্যেক বাহুর মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

3. $(1, 3)$ এবং $(2, 7)$ বিন্দুর সংযোজক সরলরেখাকে যে বিন্দু $3 : 4$ অনুপাতে অন্তঃস্থ ভাবে বিভক্ত করে তাহার স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

4. যে বিন্দু $(1, 4)$ এবং $(9, -12)$ বিন্দু দুইটির সংযোজক সরলরেখাকে (i) অন্তঃস্থ ভাবে $(5 : 3)$ এবং (ii) বহিঃস্থ ভাবে $(3 : 4)$ অনুপাতে বিভক্ত করে তাহার স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

5. যে বিন্দু $(8, -5), (-2, 7)$ বিন্দু দুইটির সংযোজক সরলরেখাকে $3 : 4$ অনুপাতে অন্তঃস্থ ভাবে বিভক্ত করে তাহার স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

6. P $(1, -2)$ Q $(-3, 4)$ বিন্দুর সংযোজক সরলরেখা R এবং R′ বিন্দুতে ত্রিখণ্ডিত হইয়াছে ; R, R′ এর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

7. $(-7, 17)$ এবং $(-9, 13)$ বিন্দু দুইটির সংযোজক সরলরেখার মধ্যবিন্দুটির মূল বিন্দু হইতে দূরত্ব কত ?

8. AB একটি সরলরেখা $(3, 4)$ বিন্দুতে $2 : 3$ এবং $(6, 2)$ বিন্দুতে $3 : 2$ অনুপাতে বিভক্ত হইয়াছে। A ও B বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

9. P $(7, -1)$, Q $(5, -4)$, R $(3, -6)$ ত্রিভুজের কৌণিক বিন্দু। QR-এর মধ্যবিন্দু S. PS-এর দূরত্ব নির্ণয় কর

10. প্রমাণ কর যে $(4, 6), (6, 8)$ বিন্দু.. ......জক সরলরেখার মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক x এবং y দ্বারা $3x-2y-1=0$ সমীকরণটি সিদ্ধ হইবে।

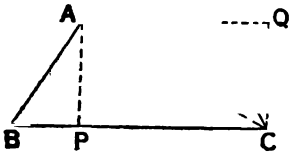
তৃতীয় অধ্যায়

ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল

(Area of a triangle)

1. ট্রাপিজিয়মের ক্ষেত্রফল (Area of a trapezium).

ABCD একটি ট্রাপিজিয়ম যাহার AD || BC.

AC যুক্ত কর এবং BC-র উপর AP এবং বর্ধিত AD-র উপর CQ লম্ব আঁক।

এখন ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times$ ভূমি $\times$ উন্নতি ;

$\therefore$ ট্রাপিজিয়ম ABCD

$= \triangle ABC + \triangle ACD$

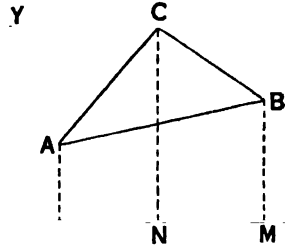
$= \frac{1}{2}.BC.AP + \frac{1}{2}.AD.CQ$

$= \frac{1}{2}(BC + AD).AP \quad (\because \quad AP = CQ)$

অর্থাৎ ট্রাপিজিয়ামের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}$ (সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের সমষ্টি) $\times$ উন্নতি।

2. ত্রিভুজের কৌণিক বিন্দু তিনটির স্থানাঙ্ক দেওয়া আছে ; স্থানাঙ্ক দ্বারা ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করিতে হইবে। (কার্টিজের ভুজ-কোটি ধরিয়া)।

To find the area of the triangle, the co-ordinates of whose angular points are given, the axes being rectangular.

মনে কর ABC ত্রিভুজের A (x_1, y_1), B (x_2, y_2) এবং C (x_3, y_3). A, B, C হইতে OX-এর উপর যথাক্রমে AL, BM এবং CN লম্ব টান।

মনে কর ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \triangle ABC$ ধরা হইল।

এখন, $\triangle ABC =$ ট্রাপি. ALNC + ট্রাপি. CNMB − ট্রাপি. ALMB.

$$= \frac{1}{2}(AL + NC).LN + \frac{1}{2}(NC + MB).NM - \frac{1}{2}(LA + MB).LM.$$

$$= \frac{1}{2}[(y_1 + y_3)(x_3 - x_1) + (y_3 + y_2)(x_2 - x_3) - (y_1 + y_2)(x_2 - x_1)]$$

$$= \frac{1}{2}[x_3y_1 + x_3y_3 - x_1y_1 - x_1y_3 + x_2y_3 + x_2y_2 - x_3y_3 - x_3y_2 - x_2y_1 - x_2y_2 + x_1y_1 + x_1y_2]$$

$$= \frac{1}{2}[x_3y_1 - x_1y_3 + x_2y_3 - x_3y_2 - x_2y_1 + x_1y_2]$$

$$= \frac{1}{2}[x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_3 - x_3y_2 + x_3y_1 - x_1y_3] \qquad \text{(i)}$$

অথবা $= \frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]$ (ii)

• **অনুসিদ্ধান্ত**। কোন ত্রিভুজের কৌণিক বিন্দু যথাক্রমে (0, 0), (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2). উহার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

পূর্ব সূত্র অনুসারে,

$$\Delta = \frac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_3 - x_3y_2 + x_3y_1 - x_1y_3)$$

এখন উক্ত সূত্রে, $x_3 = 0$ এবং $y_3 = 0$ বসাইলে,

$$\Delta = \frac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1)$$

উদা. 1. ABC ত্রিভুজের A (2, 5), B (3, −4) এবং C (8, −1). ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

$$\triangle ABC = \frac{1}{2}[2 \times (-4) - (3 \times 5) + (3 \times -1) - 8(-4) + 8.5 - 2.(-1)]$$

$$= \frac{1}{2}[-8 - 15 - 3 + 32 + 40 + 2]$$

$$= \frac{1}{3}[-26 + 74] = \frac{1}{2}.48 = 24.$$

উদা. 2. A (−1, 1), B (3, 3), C (5, −2). ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

$$\triangle ABC = \frac{1}{2}[-1 \times 3 - 3 \times 1 + 3.(-2) - 5.3 + 5.1 - (-1).(-2)]$$

$$= \frac{1}{2}[-3 - 3 - 6 - 15 + 5 - 2]$$

$$= \frac{1}{2} \times -24 = -12.$$

কিন্তু A (−1, 1), B (5, −2), C (3, 3) ধরিলে,

$$\triangle ABC = \frac{1}{2}[2 - 5 + 15 + 6 + 3 + 3]$$

$$= \frac{1}{2}.24 = 12.$$

দ্রষ্টব্য। ক্ষেত্রফল একটি ধনাত্মক রাশি। ধনাত্মক ক্ষেত্রফল পাইতে হইলে, অনুচ্ছেদ 2-এ A, B, C বিন্দু তিনটিকে এমন ক্রমে লইতে হইবে যেন A হইতে আরম্ভ করিয়া ত্রিভুজের ধার ধরিয়া B পর্যন্ত এবং B হইতে C পর্যন্ত চলিলে ত্রিভুজের অবস্থানটি সর্বদাই বাঁ দিকে থাকে। উদাহরণ 2-এ ক্ষেত্রফল ঋণাত্মক হইয়াছে,

কিন্তু B ও C অক্ষরের পরস্পর স্থান পরিবর্তন করায় উত্তর ধনাত্মক হইয়াছে। ক্ষেত্রফল ধনাত্মক বা ঋণাত্মক হইতে পারে কিন্তু উহাদের পরম মান সর্বদাই সমান এবং ক্ষেত্রফলকে সাধারণতঃ ধনাত্মক বলিয়াই ধরা হয়।

অনুশীলনী 4

ত্রিভুজের তিনটি কৌণিক বিন্দুর স্থানাঙ্ক দেওয়া আছে; ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর:

1. $(4, 1), (6, 6)$ এবং $(10, -3)$.
2. $(0, -4), (3, 6)$ এবং $(-8, -2)$.
3. $(3, -1), (9, -1)$ এবং $(6, 6)$.
4. $(5, 2), (-9, -3)$ এবং $(-3, -5)$.
5. $(2, 1), (3, -2)$ এবং $(4, -1)$.
6. $(0, 0), (a, b)$ এবং $(-b, a)$.
7. $(-1, 3), (-1, -1)$ এবং $(2, 1)$.
8. $(a, b+c), (a, b-c)$ এবং $(-a, c)$.
9. $(a-b, b), (a-b, b-2c)$ এবং $(-a-b, 0)$.
10. $(a+c, d), (c-a, d)$ এবং $(c, b+d)$.

ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল শূন্য দেখাইয়া প্রমাণ কর যে A, B, C সমরেখ:

11. A $(3a, 0)$, B $(0, 3b)$ এবং C $(a, 2b)$. [C. U. 1924]
12. A $(5, 6)$, B $(4, 2)$ এবং C $(2, -6)$.
13. A $(-\frac{1}{2}, 3)$, B $(-5, 6)$ এবং C $(-8, 8)$.
14. A $(a, b+c)$, B $(b, c+a)$ এবং C $(c, a+b)$.
15. A $(2, 3)$, B $(4, 5)$ এবং C $(6, 7)$.
16. A $(3, 0)$, B $(1, 8)$ এবং C $(4, -4)$.
17. A $(0, 5)$, B $(2, 4)$ এবং C $(-2, 6)$.
18. A $(2, 3)$, B $(-1, 5)$ এবং C $(5, 1)$.
19. A $(3, 2)$, B $(-1$, [illegible]) এবং C $(5, 5)$.

20. A বিন্দুর কোটি 6 এবং উহা B $(-1, 3)$ এবং C $(3, 0)$ এর সহিত সমরেখ; A বিন্দুর ভুজ নির্ণয় কর।

21. ত্রিভুজের তিনটি কৌণিক বিন্দু $(4, 0)$, $(-4, 0)$ এবং $(3, 5)$. প্রমাণ কর যে $(3, 5)$ বিন্দু হইতে বিপরীত বাহুর উপর মধ্যমা ত্রিভুজটিকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

চতুর্থ অধ্যায়

সরলরেখা

1. **সঞ্চার পথ (Locus).** কোন বিন্দু এক বা একাধিক সর্তাধীনে থাকিয়া যে পথে চলে বা সঞ্চরণ করে, তাহাকে **সঞ্চার পথ** বলে।

বিন্দুর সঞ্চার পথ রেখা ছাড়া আর কিছুই হইতে পারে না। বিন্দুর গতির প্রকৃতি অনুসারে এই রেখা সরল কিংবা বক্র হয়। আবার যে নির্দিষ্ট নিয়মে বিন্দু সঞ্চরণ করে সেই নির্দিষ্ট নিয়মই বিন্দুর গতির প্রকৃতি নির্ধারিত করে। নির্দিষ্ট নিয়ম বা নিয়মসমূহ হইতে, যুক্তি দ্বারা বিশিষ্ট চল-বিন্দুর সঞ্চার পথ সরল কিংবা বক্র হইবে নির্ণয় করিতে পারা যায়।

চল-বিন্দুর গতির সর্ত বা সর্তগুলিকে বিন্দুর স্থানাঙ্ক (Co-ordinates) দ্বারাও প্রকাশ করা যায়। সুতরাং জ্যামিতিক সঞ্চার পথের বৈজিক সমীকরণ এমন একটি সমীকরণ হইবে যাহাতে ঐ বিন্দুর ভুজ ও কোটির সম্বন্ধ এমনভাবে প্রকাশিত হইবে যে ঐ সঞ্চার পথের যে কোন বিন্দুর ভুজ-কোটি-মান দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ হইবে, কিন্তু উহার বহিস্থ কোন বিন্দুর ভুজ-কোটি-মান দ্বারা ঐ সমীকরণটি সিদ্ধ হইবে না।

মনে কর একটি বিন্দু P(x, y) এমন ভাবে সঞ্চরণ করিতেছে যে, উহার কোটি, ভুজের তিনগুণ অপেক্ষা 2 কম। তাহা হইলে, P বিন্দুর কোটি = ভুজের তিনগুণ -2, অর্থাৎ ভুজ-কোটি দ্বারা প্রকাশ করিলে, উক্ত সম্বন্ধ হইবে, $y=3x-2$.

এখন, সাধারণভাবে বিন্দু P(x, y) এমনভাবে সঞ্চরণ করিতেছে যে উহার কোটি, ভুজের m গুণ অপেক্ষা c বেশী, তাহা হইলে উক্ত P বিন্দুর সঞ্চার পথের সর্তসূচক বৈজিক সমীকরণ হইবে,

$$y=mx+c.$$

ইহাই সরলরেখার m-form বা m-আকারের সাধারণ বৈজিক সমীকরণ। $y=0$ এর সঞ্চার পথ x-অক্ষ। সুতরাং x-অক্ষের যে কোন বিন্দুর পক্ষে $y=0$.

সুতরাং $y=0$, x-অক্ষের বৈজিক সমীকরণ। তদ্রূপ $x=0$, y-অক্ষের বৈজিক সমীকরণ।

2. যে কোন অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয়।

[To find the equation to a straight line parallel to one of the axes of co-ordinates.]

মনে কর PAQ সরলরেখা Y-অক্ষের সমান্তরাল এবং X-অক্ষের A বিন্দুতে এমনভাবে ছেদ করিয়াছে যে $OA=a$.

এখন PAQ সরলরেখার উপর M (x, y) যে কোন বিন্দু অবস্থিত হইলে উহার ভুজ সর্বদাই a-র সমান।

সুতরাং YY′ অক্ষের সমান্তরাল এবং a-ব্যবধানে অবস্থিত যে কোন PQ সরলরেখার সমীকরণ $x=a$.

অনুরূপভাবে XX′ অক্ষের সমান্তরাল এবং b-ব্যবধানে অবস্থিত সরলরেখার সমীকরণ $y=b$.

একটি বিন্দু মূলবিন্দু হইতে সর্বদাই 5 একক দূরে থাকিয়া সঞ্চরণ করিতেছে; ঐ বিন্দুটির সঞ্চার পথ এবং সঞ্চার পথের সমীকরণ নির্ণয় কর।

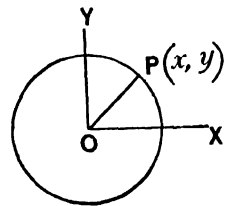
জ্যামিতির সাহায্যে দেখান যায় যে উক্ত বিন্দুর সঞ্চার পথ একটি বৃত্ত যাহার কেন্দ্র মূলবিন্দু এবং ব্যাসার্ধ 5-একক।

এখন, ঐ বৃত্তের উপর P (x, y) যে কোন একটি বিন্দু লইলে O-বিন্দু হইতে উহার দূরত্ব

$$=\sqrt{(x-o)^2+(y-o)^2}=\sqrt{x^2+y^2}.$$

কিন্তু প্রদত্ত সর্ত অনুসারে বৃত্ত পরিধির উপর P-এর যে কোন অবস্থানে মূলবিন্দু হইতে P-এর দূরত্ব 5-একক।

সুতরাং উক্ত সর্তটি নিম্নলিখিত সমীকরণ দ্বারা প্রকাশিত করা যায়:

$$\sqrt{x^2+y^2}=5 \quad \text{বা} \quad x^2+y^2=25$$

(5, 0), (0, 5), (4, 3), (3, 4) প্রভৃতি বিন্দুগুলি দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ হয় এবং ঐ বিন্দুগুলি সঞ্চার পথের উপর অবস্থিত।

দ্রষ্টব্য। একটি বিন্দু দ্বারা x, y সমন্বিত কোন সমীকরণ সিদ্ধ হওয়ার অর্থ হইল বিন্দুটির x-অক্ষমান এবং y-অক্ষমান সমীকরণের x এবং y-এর পরিবর্তে স্থাপন করিলে সমীকরণটি সিদ্ধ (satisfied) হইবে।

3. উক্ত আলোচনা হইতে বুঝা যাইতেছে যে—কোন বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y) হইলে, x এবং y দ্বারা গঠিত সমীকরণ নির্ণেয় সঞ্চার পথের সমীকরণ হইবে এবং

(i) সঞ্চার পথের উপর অবস্থিত যে কোন বিন্দুর স্থানাঙ্ক দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ হইবে, কিন্তু সঞ্চার পথের বহিঃস্থ কোন বিন্দু দ্বারাই সমীকরণটি সিদ্ধ হইবে না ;

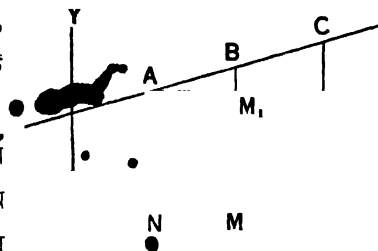
(ii) বিপরীতক্রমে, যে বিন্দু, অর্থাৎ যে বিন্দুর স্থানাঙ্ক দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ হইবে সেই বিন্দুটি অবশ্যই সঞ্চার পথের উপর অবস্থিত হইবে।

সুতরাং সঞ্চার পথের সমীকরণে চলরাশি x, y অথবা উভয় x, y দ্বারা [illegible] হয় ; বিপরীতক্রমে x, y অথবা উভয় x. y দ্বারা প্রকাশিত সমীকরণ সাধারণভাবে সঞ্চার পথ সূচিত করে।

সুতরাং উক্ত আলোচনা হইতে বুঝা যাইতেছে যে সঞ্চার পথ একটি সন্ততরেখা (continuous line)-সরল বা বক্র। সর্ত বা সর্তাবলীর উপর রেখার প্রকৃতি নির্ভর করে।

[বর্তমান অধ্যায়ে মাত্র সরলরেখার আলোচনাই সীমাবদ্ধ থাকিবে। বক্ররেখার আলোচনা পরবর্তী শ্রেণীর পাঠ্যাংশে আলোচিত হইবে।]

4. সরলরেখার নতি (Gradient of a straight line).

মনে কর কোন সরলরেখার উপর A, B, C তিনটি বিন্দু। যাহাদের কোটি যথাক্রমে AN, BM এবং CR.

সরলরেখার এক বিন্দু হইতে অপর কোন বিন্দু পর্যন্ত ভুজের বৃদ্ধিতে কোটির যে বৃদ্ধি হয় তাহাকেই ঐ সরলরেখার নতির মান (gradient) বলা হয়।

A-বিন্দু হইতে B-বিন্দুতে যাইতে কোটির বৃদ্ধি BM_1, যখন ভুজের বৃদ্ধি $NM = AM_1$.

$\therefore$ কোটি ও ভুজের বৃদ্ধির অনুপাত $= \dfrac{BM_1}{AM_1} =$ (সরলরেখার নতি)

অনুরূপভাবে A হইতে C পর্যন্ত সরলরেখার নতি $= \dfrac{CR_1}{AR_1}$

কিন্তু ABM_1, এবং ACR_1, ত্রিভুজ দুইটি সদৃশকোণী বলিয়া

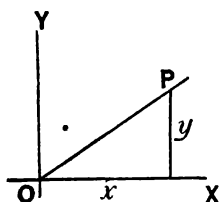
$$\frac{BM_1}{AM_1} = \frac{CR_1}{AR_1}$$

অর্থাৎ সরলরেখার উপর যে কোন বিন্দুর পক্ষে সরলরেখার নতি ধ্রুবক।

উভয় অক্ষের বরাবর একই একক ধরা হইলে ঐ অনুপাত দ্বারা x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সহিত সরলরেখার উৎপন্ন কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত ট্যানজেণ্ট (Tangent) সূচিত হয়। ঐ সরলরেখার উপর S (x, y) যে কোন বিন্দু হইলে, ঐ সরলরেখার নতি

$$\frac{y}{x} = m \text{ (ধর)}$$

$\therefore$ $y = mx$ সরলরেখার সাধারণ সমীকরণ।

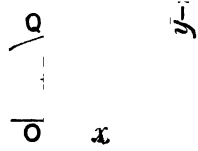
উদা. 1. মূল বিন্দুগামী কোন সরলরেখার নতি $\frac{2}{5}$ এবং ঐ সরলরেখার যে কোন P (x, y) বিন্দুর x এবং y এর সম্বন্ধ নির্ণয় করিতে হইবে।

[illegible], নতি (gradient) $= \dfrac{y}{x}$.

$\therefore$ প্রশ্ন অনুসারে, $\dfrac{y}{x} = \dfrac{2}{5}$

$\therefore$ $y = \dfrac{2x}{5} =$ নির্ণেয় সমীকরণ।

উদা. 2. মনে কর কোন সরলরেখার নতি $\frac{2}{3}$ এবং y-অক্ষকে উহা (0, 2) বিন্দুতে ছেদ করে। সরলরেখাটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

ধর P (x, y) সরলরেখার উপর যে কোন একটি বিন্দু।

মনে কর সরলরেখাটি OY-কে Q বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে ; QR ∥ OX আঁক।

এখন, PQ সরলরেখার নতি $= \frac{PR}{QR} = \frac{y-2}{x} = \frac{2}{3}$

$$\frac{y-2}{x} = \frac{2}{3} \quad \text{বা} \quad 3y = 2x + 6$$

$$\text{বা } y = \frac{2x}{3} + 2, \text{ ইহাই নির্ণেয় সমীকরণ।}$$

P (x_1, y_1) এবং Q (x_2, y_2) কোন সরলরেখার উপর দুইটি বিন্দু ; PQ সরলরেখা OX-অক্ষের সহিত θ-কোণ উৎপন্ন করিয়াছে। OX-এর সহিত সরলরেখার নতি (gradient), $\tan \theta$ বা m নির্ণয় কর।

Y Q A O M N X

PM এবং QN, OX এর উপর লম্ব, PR ∥ OX.

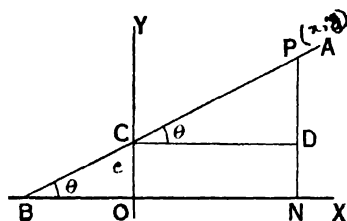
এখন, $PR = x_2 - x_1$ এবং $QR = y_2 - y_1$

$\therefore \angle QPR = \angle QAN = \theta$

$$m = \tan \angle QPR = \tan \theta = \frac{QR}{PR} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} (= \text{gradient})$$

6. Y-অক্ষ হইতে কোন নির্দিষ্ট দৈর্ঘ্য ছেদ করে এবং X-অক্ষের সহিত কোন নির্দিষ্ট কোণ করে এরূপ সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয়।

[To find the equation of a straight line which cuts off a

given intercept on the Y-axis and which is inclined at a given angle to the X-axis.]

মনে কর AB সরলরেখা OY-কে C বিন্দুতে ছেদ করিয়া বর্ধিত XO এর সহিত B-বিন্দুতে $\angle ABX = \theta$ উৎপন্ন করিয়াছে।

ধর $CO = c$ এবং $P(x, y)$

PN, OX-এর উপর লম্ব এবং $CD \parallel OX$

তাহা হইলে, $ON = x$ এবং $PN = y$

$$PN = ND + DP$$
$$= c + DP$$
$$= c + CD.\tan\theta$$
$$\therefore \quad y = c + x.m \quad (\because \tan\theta = m)$$

অর্থাৎ $y = mx + c$

AB সরলরেখার উপর অবস্থিত যে কোন P বিন্দুর পক্ষে ইহা সত্য বলিয়া $y = mx + c$ নির্ণেয় সমীকরণ।

উদা. কোন সরলরেখার y-axis এর সহিত ছেদ বিন্দুর দূরত্ব 1 এবং $\tan\theta = 2$. সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

সরলরেখার উপর P (x, y) যে কোন বিন্দু হইলে,

$$y = mx + c$$

বা $y = 2x + 1$ = নির্ণেয় সমীকরণ।

অনুসিদ্ধান্ত। মূলবিন্দুগামী সরলরেখায় $OC = c = 0$ (পূর্বচিত্রে)

$\therefore$ মূলবিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ : $y = mx + 0$.

বা $y = mx$.

দ্রষ্টব্য। (i) $y = mx + c$ সমীকরণটিকে m-form বা Tangent-formএর সমীকরণ বলা হয়। এই সমীকরণে সরলরেখাটি x-অক্ষের সহিত যে ধনাত্মক কোণ উৎপন্ন করে তাহার tangent m দ্বারা এবং y-অক্ষ হইতে উহা যে দৈর্ঘ্য ছেদ করে তাহা c দ্বারা সূচিত হয়।

x, y সমন্বিত প্রথম মানের সমীকরণের y-কে এক পক্ষে এবং x ও অপর রাশিকে

অপর পক্ষে পক্ষান্তরিত কর। এখন y-এর সহগ দ্বারা উভয়পক্ষকে ভাগ কর। তাহা হইলে x-এর সহগ হইবে m এবং ধ্রুবক রাশি হইবে c.

ধর, $Ax+By+C=0$ একটি সমীকরণ.

পক্ষান্তর করিয়া, $By=-Ax-C$

$$\therefore\quad y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}.$$

এস্থলে y-অক্ষের ছেদের দৈর্ঘ্য $=-\frac{C}{B}$, এবং

x-অক্ষের সহিত ধনাত্মক কোণ θ হইলে, $\tan\theta=-\frac{A}{B}$

দ্রষ্টব্য। (ii) $y=mx+c$ এই সমীকরণে,

$m=0$ হইলে, $y=0.x+c$ বা $y=c$ $\therefore$ ইহার সঞ্চারপথ একটি সরলরেখা যাহা x-অক্ষের সমান্তরাল এবং উহা হইতে c-ব্যবধানে অবস্থিত।

$c=0$ হইলে, $y=mx$. $\therefore$ ইহার সঞ্চার পথ মূলবিন্দুগামী একটি সরলরেখা।

দ্রষ্টব্য। (iii) দুইটি সরলরেখা সমান্তরাল হইলে উহাদের 'm' সমান, কারণ উভয়ই x-অক্ষের সহিত সমান কোণ উৎপন্ন করে।

উদা. $2x+3y-4=0$ এই সমীকরণ হইতে,

$$3y=-2x+4$$

বা $$y=-\tfrac{2}{3}x+\tfrac{4}{3}$$

এস্থলে, $\theta=\tan^{-1}(-\tfrac{2}{3})$

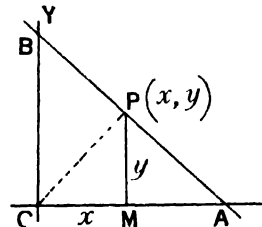
এবং y-অক্ষের ছেদ (intercept) $=\tfrac{4}{3}$.

7. যে সরলরেখা x এবং y অক্ষ হইতে যথাক্রমে a ও b দৈর্ঘ্য ছেদ করে তাহার সমীকরণ নির্ণয়।

[To find the equation to a straight line which cuts off given intercepts from the axes.]

মনে কর AB সরলরেখা OX হইতে OA এবং OY হইতে OB অংশ ছেদ করিল যাহাতে $OA=a$ এবং $OB=b$ হইল।

ঐ সরলরেখার উপর যে কোন P-বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y). P হইতে OX-এর উপর PM লম্ব টান।

তাহা হইলে, $OM=x$ এবং $PM=y$

এবং $y - y_1 = m(x - x_1)$ [(1) হইতে (2) বিয়োগ করিয়া]$\cdots\cdots$(5)

$\therefore \dfrac{y-y_1}{y_2-y_1} = \dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}$ অর্থাৎ $y - y_1 = \dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}(y_2 - y_1)$

$= \dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x - x_1)\cdots\cdots$(6)

দ্রষ্টব্য। (x_1, y_1) বিন্দুগামী সরলরেখার উপর (x, y) যে কোন বিন্দু হইলে, উহার gradient $= m = \dfrac{y-y_1}{x-x_1}$ $\therefore$ $y - y_1 = m(x - x_1)$. এখন, (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2) সরলরেখার উপর দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু এবং (x, y) উহার উপর যে কোন বিন্দু, (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2) নির্দিষ্ট বিন্দু বলিয়া ঐ সরলরেখার gradient

$m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

$\therefore$ $y - y_1 = m(x - x_1)$

$\therefore$ $y - y_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$ (= নির্ণেয় সমীকরণ).

10. দুইটি পরস্পরচ্ছেদী সরলরেখার ছেদ বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয়।

[To find the co-ordinates of the point of intersection of two given straight lines.]

মনে কর সরলরেখা দুইটির সমীকরণ :

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0\cdots\cdots(1)$$

$$a_2x + b_2y + c_2 = 0\cdots\cdots(2)$$

এখন, সরলরেখা দুইটি P(x_1, y_1) বিন্দুতে ছেদ করিলে P-বিন্দুর স্থানাঙ্ক দ্বারা উভয় সমীকরণ সিদ্ধ হইবে।

সুতরাং, $a_1x_1 + b_1y_1 + c_1 = 0\cdots\cdots(3)$

এবং, $a_2x_1 + b_2y_1 + c_2 = 0\cdots\cdots(4)$

এখন, বজ্রগুণন দ্বারা,

$$\frac{x_1}{b_1c_2 - b_2c_1} = \frac{y_1}{c_1a_2 - c_2a_1} = \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

$$x_1 = \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \text{ এবং } y_1 = \frac{c_1a_2 - c_2a_1}{a_1b_2 - a_2b_1}.$$

উদা. $4x+3y=18$ এবং $3x-2y=5$ সরলরেখা দুইটির ছেদ বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

দুইটি অজ্ঞাত রাশি বিশিষ্ট সহ-সমীকরণের সমাধান করিলেই ছেদ বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণীত হইবে।

$$\left.\begin{array}{l}4x+3y-18=0\\3x-2y-\ \ 5=0\end{array}\right\}$$

বজ্রগুণন প্রণালী দ্বারা,

$$\frac{x}{-15-36}=\frac{y}{-54+20}=\frac{1}{-8-9} \text{ বা } \frac{x}{-51}=\frac{y}{-34}=\frac{1}{-17}$$

বা, $\frac{x}{3}=\frac{y}{2}=\frac{1}{1}$ $\therefore$ $x=3,\ y=2.$

$\therefore$ ছেদ বিন্দুর স্থানাঙ্ক (3, 2).

11. দুইটি পরস্পরচ্ছেদী সরলরেখার অন্তর্ভুক্ত কোণ নির্ণয়।

[To find the angle between two straight lines.]

মনে কর, AB_1, AB_2 সরলরেখা দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণ α এবং $\angle AB_1X=\theta_1$ এবং $\angle AB_2X=\theta_2$.

তাহা হইলে, $\alpha=\theta_1-\theta_2$. ……(1)

(i) মনে কর $y=m_1x+c_1$ এবং $y=m_2x+c_2$ সরলরেখা দুইটির সমীকরণ।

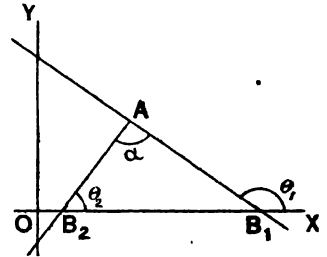
$\therefore$ $\tan\theta_1=m_1$ এবং $\tan\theta_2=m_2$

এখন, (i) হইতে

$$\alpha=\theta_1-\theta_2$$

$$\therefore \tan\alpha=\tan(\theta_1-\theta_2)$$

$$=\frac{\tan\theta_1-\tan\theta_2}{1+\tan\theta_1\tan\theta_2}$$

$$=\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}$$

(ii) সরলরেখা দুইটির সমীকরণ $a_1x+b_1y+c_1=0$ এবং $a_2x+b_2y+c_2=0$ এই আকারের হইলে,

$$y=-\frac{a_1}{b_1}x-\frac{c_1}{b_1}$$

এবং $$y=-\frac{a_2}{b_2}x-\frac{c_2}{b_2}$$

∴ উক্ত সমীকরণ দুইটির $m=\frac{-a_1}{b_1}$ এবং $\frac{-a_2}{b_2}$

সুতরাং (i) হইতে

$$\tan\alpha=\frac{-\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}}{1+\frac{a_1}{b_1}\cdot\frac{a_2}{b_2}}=\frac{b_1a_2-a_1b_2}{a_1a_2+b_1b_2}$$

12. দুইটি সরলরেখা পরস্পর সমান্তরাল হওয়ার সর্ত।

[Condition of parallelism of two straight lines.]

পূর্ব চিত্রে $y=m_1x+c_1$ এবং $y=m_2x+c_2$ সরলরেখা দুইটি সমান্তরাল হইলে $\theta_1=\theta_2$ বা $\theta_1-\theta_2=0$. তাহা হইলে, $\alpha=0$, সুতরাং $\tan\alpha=0$.

$$\therefore\ \frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}=0,\quad \therefore\ m_1-m_2=0$$ অর্থাৎ $m_1=m_2$ ···(i)

তদ্রূপ, $a_1x+b_1y+c_1=0$ এবং $a_2x+b_2y+c_2=0$ এই আকারের সমীকরণ হইতে

$$\frac{b_1a_2-a_1b_2}{a_1a_2+b_1b_2}=0,\quad \therefore\ b_1a_2-a_1b_2=0$$

$$\therefore\ b_1a_2=a_1b_2$$

$$\therefore\ \frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\quad \cdots\quad \cdots(ii)$$

দ্রষ্টব্য। উক্ত সরলরেখা দুইটি পরস্পর লম্ব হইলে $\alpha=90°$.

$$\therefore\ \tan(\theta_1-\theta_2)=\infty\quad \therefore\ 1+m_1m_2=0,\quad \therefore\ m_1m_2=-1$$

অথবা $m_2=-\frac{1}{m_1}$

এবং $a_1a_2+b_1b_2=0$

উদা. $x+2y=6$ এবং $3x-y=2$ সরলরেখা দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণ নির্ণয় কর।

$y=mx+c$ আকারে সমীকরণ দুইটি লিখিয়া,

$$y=-\tfrac{1}{2}x+3 \quad \cdots(i)$$
$$y=3x-2 \quad \cdots(ii)$$

মনে কর সরলরেখা দুইটি x-অক্ষের সহিত θ_1 এবং θ_2 কোণ উৎপন্ন করিয়াছে, তাহা হইলে, $\tan\theta_1=-\frac{1}{2}$ এবং $\tan\theta_2=3$.

এখন, নির্ণেয় কোণটি α হইলে

$$\tan\alpha=\tan(\theta_1-\theta_2)=\frac{\tan\theta_1-\tan\theta_2}{1+\tan\theta_1\tan\theta_2}$$
$$=\frac{-\frac{1}{2}-3}{1+(-\frac{1}{2})\times 3}=(-\tfrac{7}{2})\times(-\tfrac{2}{1})=7.$$

13. কোন বিন্দু হইতে কোন নির্দিষ্ট সরলরেখার উপর লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয়।

[To find the length of the perpendicular let from a given point upon a given straight line.]

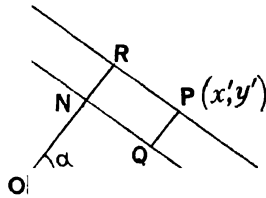
(1) মনে কর সরলরেখাটির সমীকরণ :

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0\cdots(i)$$

তাহা হইলে, AB-র উপর ON লম্ব হইলে,

$ON=p$ এবং $\angle NOX=\alpha$.

মনে কর প্রদত্ত বিন্দু P (x', y').

P-বিন্দু দিয়া AB-র সমান্তরাল সরলরেখা আঁক যাহা বর্ধিত ON-এর সহিত R-বিন্দুতে মিলিত হয়। PQ নির্ণেয় লম্ব আঁক।

এখন, $OR=p'$ হইলে, PR-এর সমীকরণ :

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha-p'=0.$$

এখন, যেহেতু এই সরলরেখা (x', y') বিন্দু দিয়া যায়,

সুতরাং $x'\cos\alpha+y'\sin\alpha-p'=0.$

$$\therefore\ p'=x'\cos\alpha+y'\sin\alpha$$

আবার, $PQ = RN = OR - ON = p' - p$.

$\therefore \quad p' - p = x' \cos \alpha + y' \sin \alpha - p$.

দ্রষ্টব্য। প্রদত্ত সমীকরণে x এবং y-র স্থলে x' এবং y' বসাইলেই নির্ণেয় লম্বের দৈর্ঘ্য পাওয়া যায়।

(2) সমীকরণটি $Ax + By + C = 0$ আকারের হইলে,

$$\frac{Ax}{\sqrt{A^2+B^2}} + \frac{By}{\sqrt{A^2+B^2}} + \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}} = 0$$

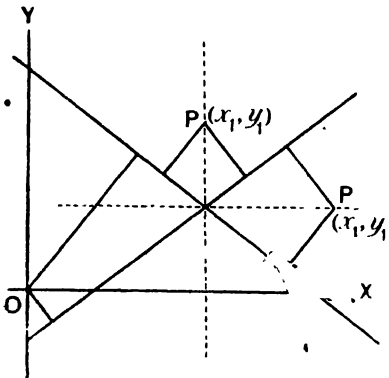
সুতরাং $\cos \alpha = \dfrac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}$, $\sin \alpha = \dfrac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$ এবং $-p = \dfrac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}$

সুতরাং (x', y') বিন্দু হইতে লম্ব $= \dfrac{Ax' + By' + C}{\sqrt{A^2+B^2}}$

দ্রষ্টব্য। মূল বিন্দু হইতে লম্ব $= \dfrac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}$

(কারণ মূল বিন্দুতে $x = 0$, $y = 0$)

14. দুই সরলরেখার অন্তর্বর্তী কোণের সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ নির্ণয় করিতে হইবে।

[To find the equation of the bisector of the angles between two straight lines.]

মনে কর $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ এবং $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ দুইটি পরস্পরচ্ছেদী সরলরেখার সমীকরণ এবং $P(x_1, y_1)$ দ্বিখণ্ডকের উপর একটি বিন্দু।

তাহা হইলে P-বিন্দু হইতে উভয় সরল রেখার উপর লম্বদ্বয়

$$\frac{a_1x_1 + b_1y_1 + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} \text{ এবং } \frac{a_2x_1 + b_2y_1 + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$$

আবার লম্বদ্বয় সমান বলিয়া, $\frac{a_1x+b_1y+c_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}} = \pm\frac{a_2x+b_2y+c_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$

উক্ত সমীকরণ দুইটি x, y যুক্ত প্রথম মানের সমীকরণ, সুতরাং উহাদের সঞ্চার-পথ সরলরেখা দ্বারা সূচিত হইবে। এই সমীকরণ দুইটি x_1, y_1, দ্বারা সিদ্ধ হইতেছে, সুতরাং $P(x_1, y_1)$ বিন্দুটি উহাদের উপর অবস্থিত। সুতরাং উহারাই সমদ্বিখণ্ডক দুইটির সমীকরণ সূচিত করিবে।

উদা. $3x-4y-6=0$ এবং $5x+12y-24=0$ এর অন্তর্বর্তী কোণের দ্বিখণ্ডকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

নির্ণেয় সমীকরণ : $\frac{3x-4y-6}{\sqrt{3^2+4^2}} = \pm\frac{5x+12y-24}{\sqrt{5^2+12^2}}$

$\therefore$ (1) $\frac{3x-4y-6}{5} = \frac{5x+12y-24}{13}$

বা $39x-52y-78=25x+60y-120$

বা $14x-112y+42=0$ বা $x-8y+3=0$ [সূক্ষ্মকোণের দ্বিখণ্ডক]

(2) $\frac{3x-4y-6}{5} = -\frac{5x+12y-24}{13}$

বা $39x-52y-78=-25x-60y+120$

বা $64x+8y-198=0$ বা $32x+4y-99=0$ [স্থূলকোণের দ্বিখণ্ডক].

বিবিধ সমাধান

উদা. 1. কোন সরলরেখা (2, 3) বিন্দুগামী এবং উহার Gradient $\frac{1}{2}$; সমীকরণটি নির্ণয় কর।

Find the equation of the straight line which passes through the point (2, 3) and whose gradient is $\frac{1}{2}$.

নির্ণেয় সমীকরণ : $\frac{y-3}{x-2}=\frac{1}{2}$

বা, $x-2=2y-6$

বা, $x-2y+4=0$

উদা. 2. কোন সরলরেখা (2, 3) এবং (5, 7) বিন্দুগামী ; উহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

Find the equation of the straight line passing through (2, 3) and (5, 7).

$$\text{Gradient } (m) = \frac{7-3}{5-2} = \frac{4}{3}$$

ঐ সরলরেখার উপর P (x, y) বিন্দু হইলে,

$$\text{Gradient} = \frac{y-3}{x-2}$$

$$\therefore \frac{y-3}{x-2} = \frac{4}{3} \quad \text{বা,} \quad 4x - 8 = 3y - 9$$

বা, $4x - 3y + 1 = 0$ (নির্ণেয় সমীকরণ)

উদা. 3. যে সরলরেখার x-অক্ষ এবং y-অক্ষের উপর ছেদ যথাক্রমে 2 এবং 1, তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

Obtain the equation of the straight line which makes intercepts 2 and 1 on the co-ordinate axes. (Cal. 1944)

নির্ণেয় সমীকরণ : $\frac{x}{2} + \frac{y}{1} = 1$ বা $x + 2y = 2$

উদা. 4. যে সরলরেখার y-অক্ষের উপর ছেদ -3 এবং x-অক্ষের সহিত নতি 45°, তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

Find the equation to the straight line which cuts off an intercept -3 on the axis of y and is inclined at 45° to the axis of x. (Cal. 1939)

মনে কর নির্ণেয় সমীকরণ $y = mx + c$

তাহা হইলে $m = \tan 45° = 1$

$\therefore y = 1.x + c$

আবার, উক্ত সরলরেখা $(0, -3)$ বিন্দুগামী

$\therefore -3 = 0 + c, \quad \therefore c = -3$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ $y = x - 3.$

উদা. 5. (7, 17) এবং (2, 5) বিন্দুর দূরত্ব নির্ণয় কর।

Find the distance between two points (7, 17), and (2, 5).

$$\text{নির্ণেয় দূরত্ব} = d = \sqrt{(7-2)^2 + (17-5)^2} = \sqrt{5^2 + 12^2}$$
$$= \sqrt{169} = 13.$$

উদা. 6. (1, 2) এবং (2, 1) বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর এবং দুই অক্ষের মধ্যবর্তী ছেদের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

Find the equation of the straight line which passes through the points (1, 2) and (2, 1). Find also the length of the straight line intercepted between the axes. [C. U. 1936]

মনে কর নির্ণেয় সমীকরণ : $y = mx + c$

তাহা হইলে, $2 = m.1 + c$ ......(i)

এবং $1 = m.2 + c$ ......(ii)

(i) এবং (ii) সমাধান করিয়া, $m = -1$ এবং $c = 3$

$\therefore\ y = -x + 3$ বা $y + x = 3$

বা $\dfrac{y}{3} + \dfrac{x}{3} = 1.$ (উভয়পক্ষকে 3 দ্বারা ভাগ ক

$\therefore$ অক্ষের উপর ছেদ 3 এবং 3.

$\therefore$ ছিন্ন অংশের দৈর্ঘ্য $= d = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}.$

উদা. 7. (−2, 4) এবং (1, −3) বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

Find the equation to the straight line passing through (−2, 4) and (1, −3).

(x_1, y_1) এবং (x_2, y_2) বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ :

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

এস্থলে, $\left.\begin{array}{l} x_1 = -2 \\ x_2 = 1 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} y_1 = 4 \\ y_2 = -3 \end{array}\right\}$

$$\therefore\ \frac{y-4}{-3-4} = \frac{x-(-2)}{1-(-2)} \text{ বা } \frac{y-4}{-7} = \frac{x+2}{3}$$

বা $3y - 12 = -7x - 14$

বা $3y + 7x + 2 = 0.$

বা $7x + 3y + 2 = 0.$

|. 8.' (1, 4) বিন্দু হইতে $5x-12y+4=0$ সরলরেখার উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

Find the length of the perpendicular drawn from (1, 4) upon the straight line $5x-12y+4=0$.

(x_1, y_1) বিন্দু হইতে $Ax+By+C=0$ সরলরেখার উপর লম্বের দৈর্ঘ্য

$$=\frac{Ax_1+By_1+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$$

তদ্রূপ (1, 4) বিন্দু হইতে $5x-12y+4=0$ সরলরেখার উপর লম্বের দৈর্ঘ্য ($x=1, y=4$ বসাইয়া)

$$=\frac{5.1-12.4+4}{\pm\sqrt{5^2+12^2}}$$

$$=\frac{-39}{-13}=3$$

[$\sqrt{A^2+B^2}$ এর চিহ্ন B-এর চিহ্নের অনুরূপ হইবে।]

উদা. 9. (4, −5) বিন্দুগামী সরলরেখা $3x+4y=-5$ সরলরেখার সহিত সমান্তরাল ; সরলরেখাটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

Find the equation to the straight line passing through (4, −5) and parallel to the straight line $3x+4y=-5$.

$3x+4y=-5$, $\therefore$ $3x+4y+5=0$ এই সরলরেখার সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ $3x+4y+c=0$ এই আকারের হইবে, কারণ উভয় রেখার m সমান।

আবার এই সরলরেখা (4, −5) বিন্দুগামী,

$\therefore$ $3.4+4.(-5)+c=0$

বা, $12-20+c=0$ $\therefore$ $c=8$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ $=3x+4y+8=0$.

উদা. 10. যে সরলরেখা (5, 6) বিন্দুগামী এবং যাহা দুই অক্ষের উপর সমান কিন্তু বিপরীত চিহ্নযুক্ত ছেদ ছিন্ন করে তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর। ঐ সরলরেখার যে বিন্দুতে কোটি ভুজের দ্বিগুণ সেই বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

Find the equation to the straight line which passes through the point (5, 6) and has intercepts on the axes equal in magnitude

but opposite in sign. Find also the co-ordinates of the point at which the ordinate is double the abscissa. (Cal. 1943)

ধর নির্ণেয় সমীকরণ $= \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

কিন্তু $b = -a$

$\therefore$ উক্ত সমীকরণ $\frac{x}{a} + \frac{y}{-a} = 1$

বা, $\frac{x}{a} - \frac{y}{a} = 1$

বা, $x - y = a$

এই সরলরেখা (5, 6) বিন্দুগামী,

$\therefore \quad 5 - 6 = a, \qquad \therefore \quad a = -1$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ : $x - y = -1$

বা, $x - y + 1 = 0.$

কোটি (ordinate) ভুজের (abscissa) দ্বিগুণ হইলে,

$y = 2x$

উক্ত $x - y + 1 = 0$ সমীকরণে y-এর স্থলে $2x$ বসাইয়া,

$x - 2x + 1 = 0$

বা, $-x + 1 = 0 \quad \therefore \quad x = 1; \quad \therefore \quad y = 2$

$\therefore$ নির্ণেয় বিন্দু (1, 2).

উদা. 11. (2, 1) বিন্দুগামী যে সরলরেখা $4x + 3y + 7 = 0$ সরলরেখার উপর লম্ব তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Find the equation to the straight line perpendicular to $4x + 3y + 7 = 0$ and passing through (2, 1).

(2, 1) বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ :

$y - 1 = m(x - 2) \qquad \cdots\cdots$(i)

(i)-সরলরেখা $4x+3y+7=0$ সরলরেখার উপর লম্ব, সুতরাং উভয়ের m-এর গুণফল $=-1$.

$$\therefore \quad m \times (-\tfrac{4}{3}) = -1$$

[$\because$ প্রদত্ত সমীকরণ : $y=-\frac{4}{3}x-\frac{7}{3}=0$ $\therefore$ ইহার $m=-\frac{4}{3}$.]

$$\therefore \quad m=\tfrac{3}{4}.$$

$\therefore$ (i) হইতে, $y-1=\frac{3}{4}(x-2)$

বা $4y-4=3x-6$

বা $3x-4y-2=0$ (নির্ণেয় সমীকরণ).

উদা. 12. m-এর মান কত হইলে $y=3x-1$, $2y=x+3$ এবং $3y=mx+4$ সমবিন্দু হইবে ?

[For what value of m will the three lines $y=3x-1$, $2y=x+3$ and $3y=mx+4$ be concurrent ?] [Cal. '40, '55]

$$\left.\begin{array}{l} y=3x-1 \\ 2y=x+3 \end{array}\right\} \text{ বা } \begin{array}{l} 2y=6x-2 \\ 2y=x+3 \\ \hline \therefore\ 5x-5=0 \end{array} \quad \therefore\ x=1 \quad \therefore\ y=2.$$

$\therefore$ উক্ত দুইটি সমীকরণের ছেদবিন্দু (1, 2).

এখন, $3y=mx+4$ পূর্বোক্ত দুইটি সরলরেখার সহিত সমবিন্দু হইলে, উহা (1, 2) দ্বারা সিদ্ধ হইবে।

$\therefore$ $3y=mx+4$

বা $3.2.=m.1+4$

$\therefore$ $m=2$.

উদা. 13. $x-2y-5=0$ এবং $x-3y+2=0$ এর অন্তর্ভুক্ত কোণ নির্ণয় কর।

$x-2y-5=0$ $\therefore$ $y=\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}$, $\therefore$ ইহার $m_1=\frac{1}{2}$ ......(1)

$x-3y+2=0$ $\therefore$ $y=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$, $\therefore$ ইহার $m_2=\frac{1}{3}$ ......(2)

নির্ণেয় কোণ θ হইলে, $\tan\theta=\dfrac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}$

$$=\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{7}{6}}=\frac{1}{6}\times\frac{6}{7}=\frac{1}{7}$$

$$\therefore \quad \theta=\tan^{-1}(\tfrac{1}{7}).$$

উদা. 14. $\frac{x}{4}+\frac{y}{5}=1$ এবং $\frac{x}{5}+\frac{y}{4}=1$ এর ছেদবিন্দু নির্ণয় কর। [Cal '41]

$$\left.\begin{array}{ll}\text{(i)} & \frac{x}{4}+\frac{y}{5}=1 \quad \text{বা} \quad 5x+4y-20=0. \\ \text{(ii)} & \frac{x}{5}+\frac{y}{4}=1 \quad \text{বা} \quad 4x+5y-20=0.\end{array}\right\}$$

বজ্রগুণন দ্বারা, $\frac{x}{-80+100}=\frac{y}{-80+100}=\frac{1}{25-16}$

বা $\frac{x}{20}=\frac{y}{20}=\frac{1}{9}$

$\therefore$ $x=\frac{20}{9}$ এবং $y=\frac{20}{9}$

$\therefore$ ছেদবিন্দু $(\frac{20}{9}, \frac{20}{9})$.

উদা. 15. $x-y-2=0$ এবং $3x+2y=12$ এর অন্তর্ভুক্ত কোণ নির্ণয় কর

(i) $y=x-2$, সুতরাং ইহার $m_1=1$

(ii) $y=-\frac{3}{2}x+\frac{12}{2}$ সুতরাং ইহার $m_2=-\frac{3}{2}$

নির্ণেয় কোণ θ হইলে, $\tan\theta=\frac{1-(-\frac{3}{2})}{1+1.(-\frac{3}{2})}=\frac{\frac{5}{2}}{-\frac{1}{2}}=-5.$

$\therefore$ $\theta=\tan^{-1}(-5)$.

অনুশীলনী 5

1. (1, 2) এবং (2, 1) বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। দুইটি অক্ষের মধ্যবর্তী সরলরেখার ছিন্ন অংশের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

[Find the equation of the straight line which passes through the points (1, 2) and (2, 1). Find also the length of the straight line intercepted between the axes.] [Cal. '39]

2. x এবং y অক্ষের উপর যে সরলরেখার ছেদ 3 এবং 4, তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Find the equation of the straight line which cuts off the intercepts 3, 4 from the axes of x and y respectively.]

3. কোন সরলরেখা অক্ষ দুইটির সহিত ছেদ করিয়া একটি সমকোণী ত্রিভুজ উৎপন্ন করিয়াছে। যদি অতিভুজ 13 এবং ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল 30 বর্গ একক হয়, সরলরেখাটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

[A straight line forms a right-angled triangle with the axes of co-ordinates. If the hypotenuse is 13 and the area of the triangle is 30, find the equation of the straight line.] [Cal. '38]

4. যে সরলরেখা (3, 2) বিন্দু এবং $3x+y-5=0$ এবং $x+5y+3=0$ এই দুইটি সরলরেখার ছেদবিন্দু দিয়া যায় তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর এবং এই সরলরেখা অক্ষদ্বয়কে ছেদ করিয়া যে ত্রিভুজ উৎপন্ন করে তাহার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

[Find the equation of the straight line passing through the point (3, 2) and the intersection of the straight lines $3x+y-5=0$, $x+5y+3=0$. Find also the area of the triangle cut off from the co-ordinate axes by this line.] [Cal. '42]

5. যে সরলরেখা (1, 2) এবং $x+2y+1=0$ এবং $2x+7y+3=0$ সরলরেখার ছেদবিন্দু দিয়া যায় তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Find the equation of the straight line which passes through the point (1, 2) and the point of intersection of the lines $x+2y+1=0$ and $2x+7y+3=0$.] [Cal. '46]

6. যে সরলরেখা (3, 5) দিয়া যায় এবং $4x-3y+1=0$ সরলরেখার সমান্তরাল তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Find the equation of the straight line passing through the point (3, 5) and parallel to $4x-3y+1=0$. [Cal. '47]

7. (3, −4) এবং (1, 2) বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণর কর।

[Find the equation of the straight line joining the points (3, −4) and (1, 2).] [Utkal '48]

8. প্রমাণ কর যে মূলবিন্দুর সহিত (2, 3) বিন্দুর সংযোজক সরলরেখা $5x-3y=2$ এবং $x+y=10$ এই দুই সরলরেখার সহিত সমবিন্দু।

[Show that the straight line joining the origin to the point (2, 3) is concurrent with $5x-3y=2$ and $x+y=10$.] [Andhra '47]

9. $2x-1=3y$ এবং $5y=x+3$ এই দুই সরলরেখার ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর এবং ঐ দুই সরলরেখার অন্তর্গত কোণ নির্ণয় কর।

[Find the co-ordinates of the point of intersection of the straight lines $2x-1=3y$ and $5y=x+3$, and find the angle between them.]

10. যে সরলরেখা (3, 2) বিন্দু এবং $2x+3y-1=0$ ও $3x-4y-6=0$ এই দুই সরলরেখার ছেদবিন্দু দিয়া যায় তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Find the equation of the straight line passing through the point (3, 2) and the point of intersection of the lines $2x+3y-1=0$ and $3x-4y-6=0$.]

11. মূলবিন্দু এবং $x-y=4$ এবং $7x+y+20=0$ এই দুই সরলরেখার ছেদবিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Find the equation of the straight line passing through the origin and the point of intersection of $x-y=4$ and $7x+y+20=0$.]

12. যে সরলরেখা $x+2y+3=0$ এবং $3x+4y+7=0$ এই দুই সরলরেখার ছেদ বিন্দু দিয়া যায় এবং $y-x=8$ সরলরেখার উপর লম্ব তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Find the equation of the straight line passing through the intersection of the lines $x+2y+3=0$ and $3x+4y+7=0$ and perpendicular to the straight line $y-x=8$.]

13. দেখাও যে মূলবিন্দু এবং $2x+5y=4$ এবং $3x+2=2y$ সরলরেখার ছেদবিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ $8x+y=0$.

[Show that the equation to the straight line joining the origin to the point of intersection of $2x+5y=4$ and $3x+2=2y$ is $8x+y=0$.] [C. U. 1944]

14. মূলবিন্দু এবং $2x+3y=1$ ও $x-y=2$ সরলরেখার ছেদবিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Obtain the equation of the straight line joining the origin to the intersection of the lines $2x+3y=1$ and $x-y=2$. [C. U. 1933]

15. কি সর্তে $a_1x+b_1y+c_1=0$ এবং $a_2x+b_2y+c_2=0$ সরলরেখা দুইটি পরস্পর লম্ব হইবে? (অক্ষ দুইটি rectangular)

[Find the condition that the straight lines $a_1x+b_1y+c_1=0$ and $a_2x+b_2y+c_2=0$ should be mutually perpendicular, the axes of cordinates being rectangular.] [C. U. '13, '26]

16. যে সরলরেখা (4, −3) বিন্দুগামী এবং $2x+11y-2=0$ সরলরেখার সমান্তরাল তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Find the equation to the straight line which passes through (4, −3) and is parallel to $2x+11y-2=0$.

17. (a, b) এবং (b, a) বিন্দু হইতে (x, y) বিন্দু সমদূরবর্তী হইলে, দেখাও যে $x=y$.

[If the point (x, y) be equidistant from the points (a, b) and (b, a), show that $x=y$.] [Cal. 1957]

18. সরলরেখাটির সমীকরণ নির্ণয় কর যাহা $2x+3y+4=0$ এবং $3x+4y-5=0$ সরলরেখার ছেদবিন্দুগামী এবং $6x-7y+8=0$ সরলরেখার উপর লম্ব।

[Find the equation of the straight line passing through the intersection of $2x+3y+4=0$ and $3x+4y-5=0$ and perpendicular to the straight line $6x-7y+8=0$. [Cal. 1958]

19. দেখাও যে $(a, b+c), (b, c+a)$ এবং $(c, a+b)$ বিন্দু তিনটি সমরেখ।

[Show that the points $(a, b+c)$, $(b, c+a)$ $(c, a+b)$ are collinear.] [Cal. Int. 1958]

20. (3, 4) বিন্দুগামী এবং $4x-3y+1=0$ সরলরেখার উপর লম্ব সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Find the equation of the straight line passing through (3, 4) and perpendicular to the line $4x-3y+1=0$.] [C. U. 1956]

21. প্রমাণ কর যে $2x-7y+10=0$, $3x-2y+1=0$ এবং $x-12y+21=0$ সরলরেখা তিনটি সমবিন্দু।

[Prove that the three straight lines $2x-7y+10=0$, $3x-2y+1=0$ and $x-12y+21=0$ meet at a point.] [C. U.]

বীজগণিত

অথ

দ্বিঘাত সহ-সমীকরণ

একটি সরল ও একটি দ্বিঘাত সমীকরণ সমন্বিত সহ-সমীকরণের সমাধান প্রণালী।

1. সাধারণ সমাধান প্রণালী। কোন সহ-সমীকরণের একটি সরল (linear) এবং অপরটি দ্বিঘাতযুক্ত (quadratic) হইলে সাধারণতঃ সরল সমীকরণের একটি অজ্ঞাত রাশিকে অপর অজ্ঞাত রাশিটির দ্বারা প্রকাশ করিয়া, ধর y-কে x সম্বলিত কোন রাশিতে পরিণত করিয়া, অপর সমীকরণটিতে y-এর পরিবর্তে উক্ত মান স্থাপন করিলে ঐ সমীকরণটি x এই একটিমাত্র অজ্ঞাত রাশিবিশিষ্ট একটি দ্বিঘাত সমীকরণে পরিণত হইবে। অতঃপর দ্বিঘাত সমীকরণের প্রণালীতে উহার সমাধান করিলে x এর দুইটি বীজ বাহির হইবে। x-এর ঐ দুইটি বীজের সাহায্যে y-এরও অনুরূপ দুইটি বীজ পাওয়া যাইবে। ইহা Method of Substitution-এর একটি প্রয়োগমাত্র।

বিশেষ বিশেষ স্থলে বিশেষ বিশেষ কৌশল প্রয়োগেও সমাধান সম্ভব। উদাহরণ দ্বারা ঐগুলি দেখান হইবে।

উদা. 1. সমাধান কর : $4x^2 - 3xy - y^2 = 6 \quad \cdots(i)$

$$4x - 3y = 4 \quad \cdots(ii)$$

(ii) হইতে $4x = 3y + 4$

$$\therefore \quad x = \frac{3y+4}{4}. \qquad \cdots(iii)$$

(i) সমীকরণে x-এর মান (iii) বসাইয়া,

$$4\left(\frac{3y+4}{4}\right)^2 - 3 \cdot \frac{3y+4}{4} \cdot y - y^2 = 6$$

বা $$\frac{4(9y^2 + 24y + 16)}{16} - \frac{3(3y^2 + 4y)}{4} - y^2 = 6.$$

বা $9y^2+24y+16-9y^2-12y-4y^2 \cdot 24.$

বা $-4y^2+12y-8=0$

বা $-4(y-1)(y-2)=0$

$\therefore$ $y-1=0$ অথবা $y-2=0.$

$\therefore$ $y=1$ বা 2.

(*iii*) সমীকরণে y-এর লব্ধমান স্থাপন করিয়া,

যদি $y=1$ হয়, $x=\dfrac{3+4}{4}=\frac{7}{4}=1\frac{3}{4}.$

যদি $y=2$ হয়, $x=\dfrac{6+4}{4}=\frac{5}{2}=2\frac{1}{2}.$

নির্ণেয় সমাধান : $\left.\begin{array}{l} x=1\frac{3}{4},\ y=1 \\ x=2\frac{1}{2},\ y=2 \end{array}\right\}$

দ্রষ্টব্য। (*i*) সরল সমীকরণটি হইতে x অথবা y-এর যে কোন একটির মান অপর সমীকরণটিতে স্থাপন করা যায়।

(*ii*) লব্ধবীজ প্রদত্ত সমীকরণে স্থাপন করিয়া সমাধানের শুদ্ধতা পরীক্ষা করা উচিত।

(*iii*) উক্ত সমাধানে x এবং y-এর দুইটি করিয়া বীজ উৎপন্ন হইয়াছে, অর্থাৎ x-এর দুইটি মানের জন্য y-এরও অনুরূপ দুইটি মান নির্ণীত হইয়াছে। সুতরাং x এবং y-এর অনুরূপ বীজ অনুসারে না সাজাইলে উত্তরে বিপর্যয় সৃষ্টি হইবে এবং উত্তর প্রকৃতপক্ষে ভুলই হইবে। উত্তর নিম্নরূপ সাজাইতে হইবে :

(1) $x=1\frac{3}{4},\ \ y=1$ অথবা $(1\frac{3}{4}, 1)$

(2) $x=2\frac{1}{2},\ \ y=2$ অথবা $(2\frac{1}{2}, 2)$

কিন্তু, $x=1\frac{3}{4}$ বা $2\frac{1}{2}$ এবং $y=1$ বা 2 এইরূপ লেখা ভুল।

2. বীজ ও সমীকরণের সংখ্যা (Number of Equations and Solutions).

সহ-সমীকরণের অন্তর্গত প্রত্যেক সমীকরণের মাত্রার গুণফলের সমান বীজের সংখ্যা হইবে। উক্ত উদাহরণে প্রথম সমীকরণটির মাত্রা (degree) 2 এবং দ্বিতীয় সমীকরণটির মাত্রা 1, সুতরাং উহার $2\times1=2$ সেট্ সমাধান হইবে। তদ্রূপ 3 এবং 2 মাত্রাযুক্ত সহ-সমীকরণের সমাধান সংখ্যা হইবে $3\times2=6.$

উদা. 2. সমাধান কর : $x^2+y^2=1 \cdots(i)$ [Gauhati, '49]

$4x+3y=5 \cdots(ii)$

(ii) হইতে $x=\dfrac{5-3y}{4}$. $\quad(iii)$

(i) এ x-এর মান বসাইয়া, $\left(\dfrac{5-3y}{4}\right)^2+y^2$

বা $\dfrac{25-30y+9y^2}{16}+y^2=1$

বা $25-30y+9y^2+16y^2=16$

বা $25y^2-30y+25-16=0$

বা $25y^2-30y+9=0$

বা $(5y-3)^2=0$, $\therefore$ $y=\frac{3}{5}, \frac{3}{5}$.

(iii) হইতে, $x=\dfrac{5-3y}{4}=\dfrac{5-3.\frac{3}{5}}{4}=\frac{16}{20}=\frac{4}{5}$

$\therefore$ $x=\frac{4}{5}, \frac{4}{5}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান : $\left.\begin{array}{l} x=\frac{4}{5},\ y=\frac{3}{5} \\ x=\frac{4}{5},\ y=\frac{3}{5} \end{array}\right\}$

উদা. 3. সমাধান কর : $\left.\begin{array}{l} x^2+y^2=29 \cdots(i) \\ x+y=7 \cdots(ii) \end{array}\right\}$

(প্রথম প্রণালী)

$x+y=7$, $\therefore$ $y=7-x$

আবার, $x^2+y^2=29$

$\therefore$ $x^2+(7-x)^2=29$

বা $x^2+49-14x+x^2-29=0$

বা $2x^2-14x+20=0$

বা $x^2-7x+10=0$

বা $(x-2)(x-5)=0$

$\therefore$ $x=2$ বা 5.

এখন, $y=7-2=5$

আবার $y=7-5=2$.

$\therefore$ $\left.\begin{array}{l} x=2 \\ y=5 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} x=5 \\ y=2 \end{array}\right\}$

(দ্বিতীয় প্রণালী)

$(x+y)^2=49$

এবং $x^2+y^2=29$

$\therefore$ বিয়োগ করিয়া, $2xy=20$,

$\therefore$ $4xy=40$

$\therefore$ $(x+y)^2-4xy=49-40$

অর্থাৎ $(x-y)^2=9$, $\therefore$ $x-y=\pm 3$.

এখন, $x+y=7$ এবং $x-y=3$ হইতে

$x=5, y=2$

এবং $x+y=7$ এবং $x-y=-3$ হইতে

$x=2, y=5$

$\therefore$ $\left.\begin{array}{l} x=5,\ y=2 \\ x=2,\ y=5 \end{array}\right\}$

উদা 4. সমাধান কর : $\left.\begin{array}{l} x+y=7 \;\cdots(i) \\ xy=10 \cdots(ii) \end{array}\right\}$

(প্রথম প্রণালী)

(i) হইতে, $x+y=7$

$\therefore \quad y=7-x \;\cdots(iii)$

(ii) হইতে, $xy=10$

$\therefore \quad x(7-x)=10$

বা $\quad 7x-x^2=10$

বা $\quad x^2-7x+10=0$

বা $\quad (x-2)(x-5)=0$

$\therefore \quad x=2$ বা $5.$

$\therefore \quad (iii)$ হইতে, $y=7-x$

$\qquad =7-2=5$

আবার $y=7-x=7-5=2.$

$\left.\begin{array}{l} x=2 \\ y=5 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x=5 \\ y=2 \end{array}\right\}$

(দ্বিতীয় প্রণালী)

$(x+y)^2-4xy=7^2-4.10=9$

অর্থাৎ $(x-y)^2=9 \;\; \therefore \;\; x-y=\pm 3.$

এখন, $\left.\begin{array}{l} x+y=7 \\ x-y=3 \end{array}\right\}$ হইতে $x=5$ এবং $y=2.$

এবং $\left.\begin{array}{l} x+y=7 \\ x-y=-3 \end{array}\right\}$ হইতে $x=2$, $y=5$

$\left.\begin{array}{l} =5 \\ =2 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x=2 \\ y=5 \end{array}\right\}$

উদা. 5. সমাধান কর $\left.\begin{array}{l} x+2y \;\;\;\, =8 \;\cdot\cdot\; (i) \\ 3x^2-xy=6 \;\cdot\cdot\; (ii) \end{array}\right\}$

(i) হইতে $x+2y=8$

$\therefore \quad y=\frac{8-x}{2}$

(ii) হইতে, $3x^2-xy=6$

বা $\quad 3x^2-x.\frac{8-x}{2}=6$

বা $\quad 6x^2-8x+x^2=12$

বা $\quad 7x^2-8x-12=0$

বা $\quad 7x^2-14x+6x-12=0$

বা $\quad 7x(x-2)+6(x-2)=0$

বা $\quad (x-2)(7x+6)=0$

$\therefore \quad x=2$ বা $-\frac{6}{7}.$

$y=\frac{8-x}{2}=\frac{8-2}{2}=3$

আবার $y=\frac{8-x}{2}=\frac{8+\frac{6}{7}}{2}=\frac{62}{14}=\frac{31}{7}=4\frac{3}{7}$

$\therefore \quad \left.\begin{array}{l} x=2 \\ y=3 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x=-\frac{6}{7} \\ y=4\frac{3}{7} \end{array}\right\}$

উদা. 6. সমাধান কর :

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2} \;\cdots\cdots (i)\\ x+y=9 \;\cdots\cdots(ii)\end{aligned}\right\}$$ [Cal. F. A. 1906]

(i) হইতে, $2(x+y)=xy \;\cdots\cdots(iii)$

(ii) হইতে, $y=9-x \;\cdots\cdots(iv)$.

$\therefore$ (iii) হইতে, $2(x+y)=xy$

বা, $2(x+9-x)=x(9-x)$ বা, $18=9x-x^2$

বা, $x^2-9x+18=0$ বা, $(x-3)(x-6)=0$ $\therefore$ $x=3$ বা 6.

এখন, (iv) হইতে $y=9-x=9-3=6$

অথবা, $y=9-x=9-6=3$

$\therefore$ $\left.\begin{aligned}x=3\\y=6\end{aligned}\right\}$ $\left.\begin{aligned}x=6\\y=3\end{aligned}\right\}$.

উদা. 7. সমাধান কর :

$$\left.\begin{aligned}x+\frac{4}{y}=1 \;\cdots\cdots(i)\\ y+\frac{4}{x}=25 \;\cdots\cdots(ii)\end{aligned}\right\}$$ [Cal. 1940]

(i) হইতে, $xy+4=y \;\cdots\cdots(iii)$

(ii) হইতে, $xy+4=25x \;\cdots\cdots(iv)$

$\therefore$ $y=25x \;\cdots\cdots (v)$

এখন, (ii) হইতে, $y+\frac{4}{x}=25$

বা, $25x+\frac{4}{x}=25$ বা, $25x^2+4=25x$ বা, $25x^2-25x+4=0$

বা, $25x^2-5x-20x+4=0$ বা, $5x(5x-1)-4(5x-1)=0$

বা, $(5x-1)(5x-4)=0$ $\therefore$ $x=\frac{1}{5}$ বা, $\frac{4}{5}$.

$\therefore$ (v) হইতে, $y=25x=25\times\frac{1}{5}=5$

অথবা, $y=25x=25\times\frac{4}{5}=20$

$\therefore$ $\left.\begin{aligned}x=\tfrac{1}{5}\\y=5\end{aligned}\right\}$ $\left.\begin{aligned}x=\tfrac{4}{5}\\y=20\end{aligned}\right\}$.

উদা. 8. সমাধান কর :

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}&=\frac{10}{3}\cdots\cdots(i)\\ x+y&=10\cdots\cdots(ii)\end{aligned}\right\}$$ [Cal. '47, '52]

(i) হইতে, $\frac{x+y}{\sqrt{xy}}=\frac{10}{3}$ বা, $\frac{10}{\sqrt{xy}}=\frac{10}{3}$ [$\because x+y=10$].

$\therefore \sqrt{xy}=3 \quad \therefore xy=9.$

এখন, $(x+y)^2=10^2$

$4xy=36$

$\therefore (x-y)^2=64 \quad \therefore x-y=\pm 8 \quad \cdot(iii)$

এখন, $x+y=10$ এবং $x+y=10$

$x-y=8 \quad \therefore x-y=-8$

$\left.\begin{aligned}x&=9\\ y&=1\end{aligned}\right\} \quad \therefore \left.\begin{aligned}x&=1\\ \therefore y&=9\end{aligned}\right\} \quad \therefore \left.\begin{aligned}x&=9\\ y&=1\end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned}x&=1\\ y&=9\end{aligned}\right\}$

প্রশ্নমালা 1.

সমাধান কর :

1. $\left.\begin{aligned}x^2+y^2&=13\\ x+y&=5\end{aligned}\right\}$
2. $\left.\begin{aligned}x^2+y^2&=25\\ x+y&=7\end{aligned}\right\}$
3. $\left.\begin{aligned}x^2-y^2&=16\\ x+y&=8\end{aligned}\right\}$
4. $\left.\begin{aligned}x^2+y^2&=20\\ x-y&=2\end{aligned}\right\}$
5. $\begin{aligned}x^2-y^2&=48\\ 2x+3y&=17\end{aligned}$
6. $\left.\begin{aligned}x^2+y^2&=9\\ 3x-2y&=0\end{aligned}\right\}$
7. $\left.\begin{aligned}x+y&=13\\ xy&=36\end{aligned}\right\}$
8. $\left.\begin{aligned}5x+2y&=20\\ xy&=10\end{aligned}\right\}$
9. $\left.\begin{aligned}x-y&=5\\ xy&=14\end{aligned}\right\}$
10. $\left.\begin{aligned}5x+2y&=26\\ 4x^2-3xy&=28\end{aligned}\right\}$
11. $\left.\begin{aligned}x^2+2y^2&=22\\ 3x+1&=2x+y\end{aligned}\right\}$
12. $\left.\begin{aligned}x^2+y^2&=a^2\\ x+y&=b\end{aligned}\right\}$
13. $\left.\begin{aligned}4x^2-y^2&=3\\ 4x+y&=5\end{aligned}\right\}$
14. $\left.\begin{aligned}x^2-xy&=15\\ x+y&=1\end{aligned}\right\}$
15. $\left.\begin{aligned}x^2-4xy&=3\\ 3x-4y&=5\end{aligned}\right\}$
16. $\left.\begin{aligned}2y^2-3x^2&=5\\ 3x-2y&=1\end{aligned}\right\}$
17. $\left.\begin{aligned}x+2y&=7\\ x^2+2y^2&=17\end{aligned}\right\}$
18. $\left.\begin{aligned}15x^2&=6y^2-xy\\ 3y-4x&=3\end{aligned}\right\}$
19. $\left.\begin{aligned}ax^2+by^2&=a+b\\ x+y&=1\end{aligned}\right\}$
20. $\begin{aligned}x+y&=a+b\\ \frac{a}{x}+\frac{b}{y}&=2\end{aligned}$

21. $\left.\begin{array}{l} x+2y+1=3 \\ x^2-2xy=3-4x \end{array}\right\}$

22. $\left.\begin{array}{r} x(4x-3y)=y^2 \\ 2x+y=6 \end{array}\right\}$

23. $\left.\begin{array}{r} 6x^2+6xy+y^2=1 \\ 4x+3y=1 \end{array}\right\}$

24. $\left.\begin{array}{l} 2x^2-y^2=1 \\ 3x+2y=1 \end{array}\right\}$

25. $\left.\begin{array}{l} x+y=\frac{5}{6} \\ \frac{1}{x}-\frac{1}{y}=1 \end{array}\right\}$ [C. U. '37]

26. $\left.\begin{array}{l} xy+x+y=27 \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2} \end{array}\right\}$ [C. U. '39]

27. $\left.\begin{array}{l} x+y=11 \\ x^2-y^2=99 \end{array}\right\}$ [C. U. '15]

28. $\left.\begin{array}{l} 2x^2+3xy+4y^2=24 \\ x+3y=7 \end{array}\right\}$

29. $\left.\begin{array}{l} 2x^2-5xy+2y^2=0 \\ x+y=3 \end{array}\right\}$

30. $\left.\begin{array}{l} 3x+2y=2xy \\ 9x+4y=5xy \end{array}\right\}$

31. $\left.\begin{array}{l} \frac{a}{x}+\frac{b}{y}=2 \\ \frac{a^2}{x^2}+\frac{b^2}{y^2}=2 \end{array}\right\}$ [C. U. 1909, 1910]

32. $\left.\begin{array}{l} x+xy=3 \\ y+xy=4 \end{array}\right\}$ [C. U. '21]

33. $\left.\begin{array}{l} 5x=2y \\ \frac{3}{x^2}-\frac{5}{y^2}=\frac{11}{20} \end{array}\right\}$ [C. U. '50]

34. $\left.\begin{array}{l} x^2+y^2=a \\ x+2y=1 \end{array}\right\}$ [C. U. '39]

35. $\left.\begin{array}{l} \frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}=18 \\ x+y=12 \end{array}\right\}$ $\left\{\begin{array}{l} \text{C. U. '19} \\ \text{Utkal '48} \\ \text{U. P. '49} \end{array}\right\}$

36. $\left.\begin{array}{l} \frac{x}{2}+\frac{y}{5}=5 \\ \frac{2}{x}+\frac{5}{y}=\frac{5}{6} \end{array}\right\}$ [C. U. '53]

37. $\left.\begin{array}{l} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2} \\ x+y=9 \end{array}\right\}$ [C. U. '39]

38. $\left.\begin{array}{l} \frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=5 \\ \frac{1}{x}-\frac{1}{y}=1 \end{array}\right\}$ [U. P. B. '47]

39. $\left.\begin{array}{l} x+\frac{1}{y}=\frac{3}{2} \\ y+\frac{1}{x}=3 \end{array}\right\}$ [C. U. '48 '58]

40. $\left.\begin{array}{l} \sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}=\frac{5}{2} \\ x+y=10 \end{array}\right\}$ [C. U. 1958]

41. $(x+y)^{\frac{2}{3}}+2(x-y)^{\frac{2}{3}}=3(x^2-y^2)^{\frac{1}{3}}$

42. $\left.\begin{array}{l} x+y-\sqrt{xy}=7 \\ x^2+y^2+xy=133 \end{array}\right\}$

43. $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{5}{4},\quad \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{3}{2}$ [C. U. Int. '59]

দ্বিতীয় অধ্যায়

Elimination (অপনয়ন)

1. মনে কর একটি অজ্ঞাত রাশিবিশিষ্ট দুইটি সমীকরণ আছে। উহাদের প্রত্যেকটিতেই অজ্ঞাত রাশির মান বীজগণিতীয় প্রতীকে প্রকাশিত। এখন একটি সমীকরণে অজ্ঞাত রাশিটির মান নির্ণয় করিয়া উক্ত মান অপর সমীকরণে অজ্ঞাত রাশিটির পরিবর্তে বসাইলে, বীজগণিতীয় প্রতীক সমূহের মধ্যে অবশ্যই অজ্ঞাতরাশি বর্জিত একটি সম্বন্ধ বর্তমান থাকিবে। এই সম্বন্ধ বর্তমান থাকিলেই অজ্ঞাতরাশির একই মানে উভয় সমীকরণ সিদ্ধ হইবে। সমীকরণ দুইটি হইতে এই প্রকার সম্বন্ধ নির্ণয়ের প্রণালীকে **Elimination (অপনয়ন)** এবং নির্ণীত সম্বন্ধকে Eliminant (অপনীতক) বলে।

এইরূপে দুইটি অজ্ঞাতরাশি বিশিষ্ট তিনটি সমীকরণ থাকিলে, যে কোন দুইটি সমীকরণ হইতে অজ্ঞাত রাশিদ্বয়ের মান নির্ণয় করিয়া উক্ত মান তৃতীয় সমীকরণে অজ্ঞাত রাশি দুইটির পরিবর্তে বসাইলে বীজগণিতীয় প্রতীক সমূহের মধ্যে অবশ্যই অজ্ঞাতরাশি বর্জিত একটি সম্বন্ধ বর্তমান থাকিবে। এই সম্বন্ধই সমীকরণ তিনটির অপনীতক হইবে।

এইভাবে দেখা যায় তিনটি অজ্ঞাতরাশি বিশিষ্ট চারিটি সমীকরণ হইতে তিনটি অজ্ঞাতরাশি অপনয়ন করিয়া অপনীতক নির্ণয় করা যায়। সাধারণভাবে বলা যায় n-সংখ্যক অজ্ঞাত রাশি অপনয়ন করিতে $(n+1)$ সংখ্যক সমীকরণের প্রয়োজন।

প্রদত্ত সমীকরণসমূহ অপনেয় রাশি সমূহের সমমাত্র হইলে সমীকরণের সংখ্যা অপনেয় রাশি-সংখ্যার সমান হইলে চলে।

উদাহরণ দ্বারা অপনয়নের প্রণালী দেখান হইতেছে।

উদা. 1. Eliminate x from the equation $ax+b=0$ and $cx+d=0$. ($ax+b=0$ এবং $cx+d=0$ সমীকরণ দুইটি হইতে x-অপনয়ন কর)।

$ax+b=0 \cdots\cdots(i)$; $cx+d=0 \cdots\cdots(ii)$

সমীকরণ (i) হইতে, $ax=-b$ বা $x=-\dfrac{b}{a}$

সমীকরণ (ii) এ x-এর পরিবর্তে $-\dfrac{b}{a}$ বসাইয়া,

$c.\left(-\dfrac{b}{a}\right)+d=0.$ বা $-\dfrac{bc}{a}+d=0.$

বা, $-bc+ad=0$, ইহাই নির্ণেয় অপনীতক।

দ্বিতীয় প্রণালী

(i) হইতে $x=-\dfrac{b}{a}$,

(ii) হইতে $x=-\dfrac{d}{c}$,

$\therefore -\dfrac{b}{a}=-\dfrac{d}{c}$

বা, $-bc=-ad$

বা, $-bc+ad=0.$

উদা. 2. Eliminate t from the equations

$v=u+ft$ and $s=ut+\frac{1}{2}ft^2$.

প্রথম সমীকরণে $ft=v-u \quad \therefore \quad t=\dfrac{v-u}{f}$

দ্বিতীয় সমীকরণে t-এর পরিবর্তে $\dfrac{v-u}{f}$ বসাইয়া,

$$s=u.\frac{v-u}{f}+\tfrac{1}{2}f.\left(\frac{v-u}{f}\right)^2.$$

$$=\frac{u(v-u)}{f}+\frac{(v-u)^2}{2f}=(v-u)\left(\frac{u}{f}+\frac{v-u}{2f}\right)$$

$$=(v-u)\frac{v+u}{2f}.$$

$\therefore \; 2fs=(v-u)(v+u)$ বা $2fs=v^2-u^2$, ইহাই নির্ণেয় অপনীতক।

উদা. 3. Eliminate x and y from the equations $ax+by+c=0$, $a_1x+b_1y+c_1=0$ and $a_2x+b_2y+c_2=0$.

$$ax+by+c=0 \qquad \cdots\cdots(i)$$
$$a_1x+b_1y+c_1=0 \qquad \cdots\cdots(ii)$$
$$a_2x+b_2y+c_2=0 \qquad \cdots\cdots(iii)$$

(*i*) ও (*ii*) হইতে বজ্রগুণন প্রণালী দ্বারা,

$$\frac{x}{bc_1 - b_1c} = \frac{y}{ca_1 - c_1a} = \frac{1}{ab_1 - a_1b}$$

$\therefore \quad x(ab_1 - a_1b) = bc_1 - b_1c$ এবং $y(ab_1 - a_1b) = ca_1 - c_1a$

$$\therefore \quad x = \frac{bc_1 - b_1c}{ab_1 - a_1b} \quad \text{এবং} \quad y = \frac{ca_1 - c_1a}{ab_1 - a_1b}$$

(*iii*) এ, x এবং y-এর মান বসাইয়া,

$$a_2\left(\frac{bc_1 - b_1c}{ab_1 - a_1b}\right) + b_2\left(\frac{ca_1 - c_1a}{ab_1 - a_1b}\right) + c_2 = 0$$

বা $a_2(bc_1 - b_1c) + b_2(ca_1 - c_1a) + c_2(ab_1 - a_1b) = 0$, ইহাই নির্ণেয় অপনীতক।

উদা. 4. Eliminate x, y, z from the equations

$$ax + by + cz = 0$$
$$a_1x + b_1y + c_1z = 0$$
$$a_2x + b_2y + c_2z = 0$$

প্রথম সমীকরণ দুইটি হইতে বজ্রগুণন প্রণালী দ্বারা,

$$\frac{x}{bc_1 - b_1c} = \frac{y}{ca_1 - c_1a} = \frac{z}{ab_1 - a_1b} = k \text{ (ধর)}$$

তাহা হইলে, $x = (bc_1 - b_1c)k$, $y = (ca_1 - c_1a)k$, $z = (ab_1 - a_1b)k$

তৃতীয় সমীকরণে x, y, z এর এই মান বসাইয়া,

$\{a_2(bc_1 - b_1c) + b_2(ca_1 - c_1a) + c_2(ab_1 - a_1b)\}k = 0$

কিন্তু $k \neq 0$. $\therefore \quad a_2(bc_1 - b_1c) + b_2(ca_1 - c_1a) + c_2(ab_1 - a_1b) = 0$, ইহাই নির্ণেয় অপনীতক।

উদা. 5. Eliminate a, b, c, from the equations $bz + cy = a$, $az + cx = b$, $ay + bx = c$. (C. F. A. 1870)

সমীকরণ তিনটিকে এইরূপে লেখা যায়,

$$-a + bz + cy = 0 \quad \cdots\cdots(i)$$
$$az - b + cx = 0 \quad \cdots\cdots(ii)$$
$$ay + bx - c = 0 \quad \cdots\cdots(iii)$$

(i) ও (ii) হইতে বজ্রগুণন প্রণালী দ্বারা,

$$\frac{a}{zx+y} = \frac{b}{yz+x} = \frac{c}{1-z^2} = k \text{ (ধর)}$$

তাহা হইলে $a = (zx+y)k$, $b = (yz+x)k$, $c = (1-z^2)k$.

(iii) এ x, y, z এর মান বসাইয়া,

$\{y(zx+y) + x(yz+x) - (1-z^2)\}k = 0$.

কিন্তু $k \neq 0$ $\therefore$ $y(zx+y) + x(yz+x) - (1-z^2) = 0$

বা, $xyz + y^2 + xyz + x^2 - 1 + z^2 = 0$

বা, $x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1$. ইহাই নির্ণেয় অপনীতক।

উদা. 6. Eliminate x from the equations $ax^2 + bx + c = 0$ and $a_1x^2 + b_1x + c = 0$.

$$ax^2 + bx + c = 0$$
$$a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0$$

$\therefore$ বজ্রগুণন প্রণালী দ্বারা, $\dfrac{x^2}{bc_1 - b_1c} = \dfrac{x}{ca_1 - c_1a} = \dfrac{1}{ab_1 - a_1b}$,

$$\therefore \frac{x^2}{bc_1 - b_1c} \times \frac{1}{ab_1 - a_1b} = \left(\frac{x}{ca_1 - c_1a}\right)^2$$

বা, $\dfrac{}{(bc_1 - b_1c)(ab_1 - a_1b)} = \dfrac{}{(ca_1 - c_1a)^2}$

$\therefore$ $(bc_1 - b_1c)(ab_1 - a_1b) = (ca_1 - c_1a)^2$. ইহাই নির্ণেয় অপনীতক।

উদা. 7. Eliminate x and y from the equations $x + y = a$, $x^2 + y^2 = b^2$, $x^3 + y^3 = c^3$.

$2xy = (x+y)^2 - (x^2 + y^2) = a^2 - b^2$ $\therefore$ $xy = \dfrac{a^2 - b^2}{2}$

এখন $c^3 = x^3 + y^3 = (x+y)^3 - 3xy(x+y)$

$$= a^3 - 3.\left(\frac{a^2 - b^2}{2}\right).a = \frac{2a^3 - 3a^3 + 3ab^2}{2} = \frac{3ab^2 - a^3}{2}$$

$\therefore$ $2c^3 = 3ab^2 - a^3$ বা $a^3 - 3ab^2 + 2c^3 = 0$.

ইহাই নির্ণেয় অপনীতক।

উদা. 8. Eliminate x, y, z from the equations $x^2 - yz = a$, $y^2 - zx = b$, $z^2 - xy = c$, and $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$.

প্রথম সমীকরণ তিনটি যোগ করিয়া,

$$a + b + c = x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx$$

$$\begin{aligned} a^2 - bc &= (x^2 - yz)^2 - (y^2 - zx)(z^2 - xy) \\ &= (x^4 - 2x^2yz + y^2z^2) - (y^2z^2 - xy^3 - xz^3 + x^2yz) \\ &= x^4 + xy^3 + xz^3 - 3x^2yz \\ &= x(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz) \end{aligned}$$

তদ্রূপ, $b^2 - ca = y(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$

এবং $c^2 - ab = z(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$

$\therefore \quad (a^2 - bc) + (b^2 - ca) + (c^2 - ab)$

$$= x(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz) + y(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz) + z(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$$

$$= (x + y + z)(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$$

অতএব, $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$

$$\begin{aligned} &= (a + b + c)\{(a^2 - bc) + (b^2 - ca) + (c^2 - ab)\} \\ &= (x^2 + y^2 + z^2 - xx - yz - zx)(x + y + z)(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz) \\ &= (x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)^2 \\ &= (3xyz - 3xyz)^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$\therefore \quad a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0$

বা $\quad a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$, ইহাই নির্ণেয় অপনীতক।

উদা. 9. Eliminate x from $ax^2 + bx + c = 0$ and $x^3 = 1$.

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \cdots\cdots(i)$$

$$x^3 = 1 \quad \cdots\cdots(ii)$$

(i) কে x দ্বারা গুণ করিয়া, $ax^3 + bx^2 + cx = 0 \quad \cdots\cdots(iii)$

(ii) কে a দ্বারা গুণ করিয়া, $ax^3 \qquad = a \quad \cdots\cdots(iv)$

(iii) ও (iv) হইতে $a + bx^2 + cx = 0 \qquad [\because \quad ax^3 = a]$

বা $\quad bx^2 + cx + a = 0 \quad \cdots\cdots(v)$

এখন, (i) ও (v) হইতে বজ্রগুণন প্রণালী দ্বারা,

$$\overline{ab - c^2} = \overline{bc - a^2},$$

$$\therefore \quad \frac{x^2}{ab - c^2} \times \frac{1}{ca - b^2} = \left(\frac{x}{bc - a^2}\right)^2$$

বা $(ab - c^2)(ca - b^2) = (bc - a^2)^2$

বা $a^2bc - ab^3 - ac^3 + b^2c^2 = b^2c^2 - 2a^2bc + a^4.$

বা $-a^4 - ab^3 - ac^3 + 3a^2bc = 0$

বা $-a(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc) = 0$

$\therefore \quad a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0.$ $\qquad [\because \; a \neq 0$

ইহাই নির্ণেয় অপনীতক।

উদা. 10. Eliminate x, y, z from the equations

$$x + y + z = a$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = b$$
$$x^3 + y^3 + z^3 = c$$
$$xyz = d.$$

$2(xy + yz + zx) = (x + y + z)^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = a^2 - b$

$xy + yz + zx \cdot \quad -b$

এখন, $c - 3d = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$

$= (x + y + z)\{x^2 + y^2 + z^2 - (xy + yz + zx)\}$

$= a\left\{b - \dfrac{a^2 - b}{2}\right\} = a\left\{\dfrac{2b - a^2 + b}{2}\right\} = \dfrac{a(3b - a^2)}{2}$

$\therefore \quad 2(c - 3d) = a(3b - a^2)$ বা $2c - 6d = 3ab - a^3$

বা $a^3 - 3ab + 2c - 6d = 0$, ইহাই নির্ণেয় অপনীতক।

উদা. 11. Eliminate l, m and n from the equations

$l^2(m + n) = a$, $m^2(n + l) = b$, $n^2(l + m) = c$, and $lmn = d$.

$l^2(m + n) + m^2(n + l) + n^2(l + m) + 2lmn = a + b + c + 2d.$

বা, $(m + n)(n + l)(l + m) = a + b + c + 2d$

আবার, $l^2(m + n).\, m^2(n + l).\, n^2(l + m) = abc$

বা, $(lmn)^2(m + n)(n + l)(l + m) = abc$

বা, $(d)^2(a + b + c + 2d) = abc,$

বা, $d^2(a + b + c + 2d) - abc = 0$, ইহাই নির্ণেয় অপনীতক।

উদা. 12. Eliminate x, y, z from the equations

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=a, \quad \frac{y}{z}+\frac{z}{y}=b, \quad \frac{z}{x}+\frac{x}{z}=c.$$

সমীকরণ তিনটি গুণ করিয়া,

$$abc=\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\right)$$

$$=\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)\left\{\frac{z}{y}\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right)+\frac{y}{z}\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\right)\right\}$$

$$=\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)\left\{\frac{x}{y}+\frac{z^2}{xy}+\frac{y}{x}+\frac{xy}{z^2}\right\}$$

$$=\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)\left\{\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{xy}{z^2}+\frac{z^2}{xy}\right)\right\}$$

$$=\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)^2+\left\{\left(\frac{x^2}{z^2}+\frac{z^2}{x^2}\right)+\left(\frac{y^2}{z^2}+\frac{z^2}{y^2}\right)\right\}$$

$$=\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)^2+\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right)^2-2+\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)^2-2$$

$$\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)^2+\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right)^2+\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)^2-4.$$

$$=a^2+b^2+c^2-4.$$

$$\therefore \quad abc=a^2+b^2+c^2-4$$

বা $a^2+b^2+c^2-abc=4$, ইহাই নির্ণেয় অপনীতক।

প্রশ্নমালা 2

Eliminate x from the following equations :

1. $ax+b+c=0$; $dx+e+f=0.$
2. $ax+\frac{b}{x}=m$; $dx-\frac{b}{x}=n.$ (Punj. U. 1932)
3. $px+q=a$; $qx-r=c.$
4. $ax^2+bx+c=0$; $dx^2+fx+g=0.$

5. $x+\frac{2}{x}=a$; $x-\frac{2}{x}=b$.

6. $ax^2+bx+c=0$; $x^3=d$.

7. $ax^3+bx+c=0$; $a_1x^3+b_1x+c_1=0$.

8. $ax^3+bx^2+cx+d=0$; $a_1x^2+b_1x+c_1=0$.

9. $x^2-ax-b=0$; $x^2+cx-d=0$.

10. $\frac{a}{x}-bx=c+d$; $\frac{b}{x}-ax=c-d$.

Eliminate x and y from the following equations :

11. $ax+by=c$; $dx+fy=g$; $mx+ny=p$.

12. $px-qy=0$; $rx+sy=0$.

13. $x+y=a$, $x^2+y^2=b$, $xy=c$.

14. $x+y=a$, $xy=b$, $x^2+y^2=c$.

15. $x+y=p$, $x^2+y^2=q$ and $x^3+y^3=r$.

16. $x-y=p$, $xy=q$ and $x^4+y^4=r$.

Eliminate x, y, z from the following equations :

17. $a_1x+b_1y+c_1z=0$, $a_2x+b_2y+c_2z=0$, $a_3x+b_3y+c_3z=0$.

18. $x=by+cz$; $y=cz+ax$; $z=ax+by$.

19. $bx+ay=cy+bz=az+cx=\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}$.

20. $\frac{y-z}{y+z}=a$; $\frac{z-x}{z+x}=b$; $\frac{x-y}{x+y}=c$.

21. $x+y+z=a$, $xy+yz+zx=b^2$, $x^3+y^3+z^3=c^3$, $xyz=d^3$.

22. Eliminate y from $m=y^x$ and $n=x^y$. (Punj. U. 1929)

23. Eliminate w, x, y, z from the equations :

$$w=ax+by+cz$$
$$x=by+cz+dw$$
$$y=ax+cz+dw$$
$$z=ax+by+dw.$$

তৃতীয় অধ্যায়

Progression (প্রগতি)

1. শ্রেণী। কোন নির্দিষ্ট নিয়মে কোন রাশিমালা পর পর সাজান থাকিলে উক্ত রাশিমালা একটি শ্রেণী (Series) উৎপন্ন করে।

যেমন, 1, 3, 5, 7 ……একটি শ্রেণী

2, 4, 6, 8 ……একটি শ্রেণী

1, 2, 4, 8 ……একটি শ্রেণী

প্রথম উদাহরণে, 1 এর সহিত 2 যোগ করিয়া 3, 3 এর সহিত 2 যোগ করিয়া 5, 5 এর সহিত 2 যোগ করিয়া 7,…ইত্যাদি ক্রমে সংখ্যাগুলি পর পর উদিত হইতেছে। সুতরাং, 7 এর পরে 9, 9 এর পরে 11 ইত্যাদি সংখ্যা আসিবে ইহা সহজেই বুঝিতে পারা যায়। কারণ, উক্ত শ্রেণীর সংখ্যাগুলি তুলনা করিলে দেখা যায় যে উহারা ক্রমশঃ দুই দুই করিয়া বাড়িয়া যাইতেছে। ইহাই হইল ঐ শ্রেণীর বৈশিষ্ট্য বা নির্দিষ্ট নিয়ম।

তৃতীয় উদাহরণে 1-কে 2 দ্বারা গুণ করিয়া 2, 2-কে 2 দ্বারা গুণ করিয়া 4, 4-কে 2 দ্বারা গুণ করিয়া 8 ইত্যাদি ক্রমে সংখ্যাগুলি পর পর আসিতেছে। প্রত্যেক পদ পূর্ববর্তী পদের দ্বিগুণ, ইহাই হইল ঐ শ্রেণীর নির্দিষ্ট নিয়ম।

2. পদ। কোন শ্রেণীর অন্তর্গত প্রত্যেক সংখ্যাকে উহার পদ (term) বলা হয়। প্রথম সংখ্যাটিকে প্রথম পদ (t_1), দ্বিতীয়টিকে দ্বিতীয় পদ (t_2), তৃতীয়টিকে তৃতীয় পদ (t_3), …n-তম পদটিকে (t_n) ইত্যাদি বলা যাইতে পারে।

সংক্ষেপার্থে আমরা প্রথম পদকে পদ 1 (বা t_1)

দ্বিতীয় পদকে পদ 2 (বা t_2)

তৃতীয় পদকে পদ 3 (t_3) ইত্যাদি বলিব।

সমান্তর শ্রেণী

(Arithmetical Progression)

3. সমান্তর শ্রেণী। যদি কোন শ্রেণীর অন্তর্গত যে কোন পদের সহিত উহার অব্যবহিত পরের পদটির অন্তর সমান থাকে, তাহা হইলে ঐরূপ শ্রেণীকে সমান্তর শ্রেণী (Arithmetical Progression সংক্ষেপে A. P.) বলা হয়; এবং ঐ সমান অন্তরটিকে **সাধারণ অন্তর** (Common difference) বলা হয়।

1, 4, 7, 10...একটি সমান্তর শ্রেণী, এবং এস্থলে সাধারণ অন্তর 3.

10, 8, 6, 4...একটি সমান্তর শ্রেণী, এবং এস্থলে সাধারণ অন্তর -2.

4. সাধারণ অন্তর নির্ণয়। সমান্তর শ্রেণীর যে কোন পদ হইতে উহার অব্যবহিত পূর্বের পদটি বিয়োগ করিলে ঐ শ্রেণীর সাধারণ অন্তর পাওয়া যায়।

1, 4, 7, 10, ·· এই শ্রেণীতে সাধারণ অন্তর

পদ 2 − পদ 1 = $4-1=3$,

অথবা, পদ 3 − পদ 2 = $7-4=3$,

অথবা, পদ 4 − পদ 3 = $10-7=3$, ইত্যাদি।

10, 8, 6, 4...এই শ্রেণীতে সাধারণ অন্তর

$8-10=-2$

অথবা, $6-8=-2$

অথবা, $4-6=-2$, ইত্যাদি।

সমান্তর শ্রেণীর প্রত্যেক দুই দুই পদের অন্তর সর্বত্রই সমান, সুতরাং দ্বিতীয় পদ হইতে প্রথম পদ বিয়োগ করিলেই সাধারণ অন্তর নির্ণীত হইবে।

সমান্তর শ্রেণীর সাধারণ অন্তর একটি ধ্রুবক এবং এই ধ্রুবকটির দ্বারা শ্রেণীর **আবৃত্তি নিয়ম** (Law of recurrence) সূচিত হয়। সুতরাং কোন সমান্তর শ্রেণীর প্রথম ও দ্বিতীয় পদটি জানিতে পারিলে অবশিষ্ট পদগুলিও জানা যায়; যেমন, কোন সমান্তর শ্রেণীর প্রথম এবং দ্বিতীয় পদ যথাক্রমে 3 এবং 7 হইলে পরবর্তী পদগুলি কিরূপ হইবে?

এস্থলে সাধারণ অন্তর $=7-3=4$. সুতরাং শ্রেণীটি এইরূপ:

3, 7, 11, 15, 19, 23, 27, ...

5. শ্রেণীর বিশেষ পদ। কোন শ্রেণীর দ্বিতীয়, চতুর্থ, সপ্তম, দ্বাদশ ইত্যাদি এইরূপ কোন নির্দিষ্ট পদকে উহার বিশেষ পদ (particular term) বলা হয়।

6. সাধারণ পদ (General Term)। কোন শ্রেণীর n-তম পদকে সাধারণ পদ বলা হয়। এই সাধারণ পদটি যে কোন পদের প্রতীক এবং উহা n-তম পদ বা t_n দ্বারা সূচিত হয়। (যে কোন ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যার পরিবর্তে n ধরা হইয়াছে।)

7. শেষ পদ। যে পদে শ্রেণী শেষ হয় তাহাকে উহার শেষ পদ (last term) বলা হয়।

কোন শ্রেণীতে মোট পদসংখ্যা 8 হইলে, উহার অষ্টম পদ বা t_8 শেষ পদ, মোট পদ-সংখ্যা 20 হইলে, উহার বিংশ পদ বা t_{20} শেষ পদ।

n-তম পদে শ্রেণী শেষ হইলে t_n উহার শেষ পদ। t_n সাধারণতঃ l দ্বারা সূচিত হয়।

8. সমান্তর শ্রেণীর সাধারণ আকার।

প্রথম পদ a এবং সাধারণ অন্তর b ধরিয়া সমান্তর শ্রেণীর সাধারণ আকার প্রকাশ করা হয়, যথা :

$$a,\ a+b,\ a+2b,\ a+3b,\ a+4b,\ \ldots\ldots$$

এস্থলে, দ্বিতীয় পদ বা $t_2 = a+(2-1)b$,

তৃতীয় পদ বা $t_3 = a+(3-1)b$, তদ্রূপ, $t_p = a+(p-1)b$

চতুর্থ পদ বা $t_4 = a+(4-1)b$, $t_q = a+(q-1)b$

পঞ্চম পদ বা $t_5 = a+(5-1)b$. $t_r = a+(r-1)b$

$\therefore$ n-তম পদ $= a+(n-1)b$. $t_{50} = a+(50-1)b$, ইত্যাদি।

অর্থাৎ $t_n = a+(n-1)b$.

কোন শ্রেণীর n-তম পদ শেষ পদ (l) হইলে,

শেষ পদ $=$ n-তম পদ $= a+(n-1)b$

$$l = t_n = a+(n-1)b.$$

9. কোন সমান্তর শ্রেণীর প্রত্যেক পদের সহিত একই সংখ্যা যোগ করিলে, অথবা প্রত্যেক পদ হইতে একই সংখ্যা বিয়োগ করিলে, অথবা প্রত্যেক পদকে একই সংখ্যা দ্বারা গুণ করিলে, অথবা প্রত্যেক পদকে একই সংখ্যা দ্বারা ভাগ করিলে, উৎপন্ন শ্রেণী সমূহের প্রত্যেকটিই সমান্তর শ্রেণী হইবে।

মনে কর $a, a+b, a+2b, \cdots\cdots$ একটি সমান্তর শ্রেণী। ইহার প্রত্যেক পদের সহিত x যোগ করিলে, প্রত্যেক পদ হইতে x বিয়োগ করিলে, প্রত্যেক পদকে x দ্বারা গুণ করিলে, প্রত্যেক পদকে x দ্বারা ভাগ করিলে নিম্নলিখিত চারিটি শ্রেণী উৎপন্ন হয় :—

(1) $a+x, a+b+x, a+2b+x, \cdots\cdots$

(2) $a-x, a+b-x, a+2b-x, \cdots\cdots$

(3) $ax, (a+b)x, (a+2b)x, \cdots\cdots$

(4) $\frac{a}{x}, \frac{a+b}{x}, \frac{a+2b}{x},$

উপরের চারিটি শ্রেণীর প্রত্যেকটিই সমান্তর শ্রেণী।

(1)-এর প্রথম পদ $a+x$, সাধারণ অন্তর b

(2)-এর প্রথম পদ $a-x$, সাধারণ অন্তর b

(3)-এর প্রথম পদ ax, সাধারণ অন্তর bx

(4)-এব প্রথম পদ $\frac{a}{x}$, সাধারণ অন্তর $\frac{b}{x}$.

উদা. 1. $1, 3, 5, 7, \cdots\cdots$ শ্রেণীর t_{20} নির্ণয় কর।

এস্থলে, t_1 বা $a=1$,

সাধারণ অন্তর বা $b=3-1=2$ এবং $n=20$

$$\therefore \quad t_{20}=1+(20-1).2$$
$$=1+38=39.$$

উদা. 2. $10, 7, 4, 1, -2, \cdots\cdots$ শ্রেণীর t_{15} নির্ণয় কর।

এস্থলে, $a=10,\ b=7-10=-3,\ n=15$

$$\therefore \quad t_{15}=10+(15-1).(-3)$$
$$=10-42=-32.$$

উদা. 3. একটি সমান্তর শ্রেণীর প্রথম পদ 3 এবং দশম পদ 30; উহার সাধারণ অন্তর নির্ণয় কর।

এস্থলে, $a = 3$, $n = 10$, $b =$ নির্ণেয় সাধারণ অন্তর।

$$t_{10} = 3 + 9b = 30$$

অথবা, $9b = 27$ $\therefore$ $b = 3$ $\therefore$ নির্ণেয় সাধারণ অন্তর $= 3$.

উদা. 4. একটি সমান্তর শ্রেণীর অষ্টম এবং পঞ্চদশ পদ যথাক্রমে 19 এবং 33. শ্রেণীটি নির্ণয় কর।

মনে কর, a প্রথম পদ এবং b সাধারণ অন্তর।

সুতরাং, $t_8 = 19 = a + 7b$ (1)

এবং, $t_{15} = 33 = a + 14b$ (2)

$\therefore$ (2) হইতে (1) বিয়োগ করিয়া,

$$7b = 14, \quad \therefore \quad b = 2$$

(1) হইতে, $a + 14 = 19$, $\therefore$ $a = 5$

$\therefore$ নির্ণেয় শ্রেণী $= 5, 7, 9, 11, 13, \cdots\cdots$

উদা. 5. $2, 5, 8, \cdots\cdots$ শ্রেণীর কোন্ পদ 89 ?

সাধারণ অন্তর $= 5 - 2 = 3$

মনে কর, উক্ত শ্রেণীর n-তম পদ 89

$\therefore$ $t_n = 2 + (n - 1)3 = 89$

অথবা, $3n = 90$, $\therefore$ $n = 30$

অর্থাৎ 30-তম পদ বা $t_{30} = 89$.

উদা 6. কোন সমান্তর শ্রেণীর p-তম পদ q এবং q-তম পদ p. প্রথম পদ এবং সাধারণ অন্তর নির্ণয় কর।

মনে কর, প্রথম পদ $= a$ এবং সাধারণ অন্তর $= b$

সুতরাং, $a + (p - 1)b = q$ $\cdots$ (1)

এবং, $a + (q - 1)b = p$ $\cdots$ (2)

$\therefore$ বিয়োগ করিয়া, $(p - q)b = q - p = -(p - q)$

$$\therefore \quad b = \frac{-(p-q)}{p-q} = -1$$

(1) হইতে, $a+(p-1)\times(-1)=q$

বা, $a-p+1=q$

বা, $a=p+q-1.$

$\therefore$ প্রথম পদ $=p+q-1$ এবং সাধারণ অন্তর $=-1.$

উদা. 7. কোন সমান্তর শ্রেণীর m-তম পদ n এবং n-তম পদ m. উহার p-তম পদ নির্ণয় কর। (C. U. 1947)

মনে কর প্রথম পদ $=a$, সাধারণ অন্তর $=b$

$\therefore$ $t_m=a+(m-1)b=n \quad \cdots(1)$

এবং $t_n=a+(n-1)b=m \quad \cdots(2)$

$(m-n)b=n-m=-(m-n)$

$b=\dfrac{-(m-n)}{m-n}=-1$

(1) হইতে, $a+(m-1)\times(-1)=n$

$\therefore$ $a-m+1=n$

$\therefore$ $a=m+n-1$

সুতরাং $t_p=a+(p-1)b$

$=m+n-1+(p-1)\times(-1)$

$=m+n-1-p+1$

$=m+n-p.$

উদা. 8. কোন সমান্তর শ্রেণীর $t_m=n$ এবং $t_n=m$. উক্ত শ্রেণীর t_{m+n} নির্ণয় কর।

প্রথম পদ $=a$, সাধারণ অন্তর $=b$ হইলে, (উদা. 7. হইতে)

$a=m+n-1, \quad b=-1$

$\therefore$ $t_{m+n}=a+(m+n-1)b$

$=m+n-1+(m+n-1)\times(-1)$

$=m+n-1-m-n+1$

$=0.$

প্রশ্নমালা 3

1. একটি সমান্তর শ্রেণী গঠন কর যাহার প্রথম পদ 1 এবং সাধারণ অন্তর 1.

2. একটি সমান্তর শ্রেণী গঠন কর যাহার প্রথম পদ 2 এবং সাধারণ অন্তর 3.

3. একটি সমান্তর শ্রেণী গঠন কর যাহার প্রথম পদ 20 এবং সাধারণ অন্তর -5.

4. একটি সমান্তর শ্রেণী গঠন কর যাহার প্রথম পদ A এবং সাধারণ অন্তর B.

5. একটি সমান্তর শ্রেণী গঠন কর যাহার প্রথম পদ x এবং সাধারণ অন্তর y.

6. 2, 5, 8, · এই শ্রেণীর t_{10} নির্ণয় কর।

7. 15, 12, 9, ··· এই শ্রেণীর t_{12} নির্ণয় কর।

8. 8, 15, 22, ··· এই শ্রেণীর t_{11} নির্ণয় কর।

9. $1, 1\frac{1}{4}, 1\frac{1}{2}, \cdots$ এই শ্রেণীর t_{16} নির্ণয় কর।

10. $a, a+2x, a+4x, \cdots$ এই শ্রেণীর t_{15} নির্ণয় কর।

নিম্নলিখিত শ্রেণীসমূহের t_n নির্ণয় কর :

11. 2, 5, 8,···

12. 1, 5, 9,···

13. 12, 8, 4,···

14. $a, a-rd, a-2rd, \cdots$

15. কোন সমান্তর শ্রেণীর প্রথম পদ 6, এবং সাধারণ অন্তর 2. t_{15} নির্ণয় কর। (C. U. 1922)

16. কোন সমান্তর শ্রেণীর প্রথম পদ 1 এবং 10-তম পদ 10. ঐ শ্রেণীর সাধারণ অন্তর কত ? (C. U. 1925)

17. কোন সমান্তর শ্রেণীর প্রথম পদ 2 এবং 20-তম পদ 59. উহার সাধারণ অন্তর কত ?

18. 5, 8, 11, ··· এই শ্রেণীর কোন্ পদ 62 ?

19. 13, 10, 7, ··· এই শ্রেণীর কোন্ পদ -17 ?

20. 2, 5, 8, ··· শ্রেণীর কোন পদ 60 হইতে পারে কি না ?

21. 4, 6, 8, ··· শ্রেণীর কোন পদ 65 হইতে পারে কি না ?

22. কোন সমান্তর শ্রেণীর $t_2 = 6$ এবং $t_4 = 14$. ঐ শ্রেণীর t_{10} নির্ণয় কর।

23. কোন সমান্তর শ্রেণীর $t_5 = 9$ এবং $t_{[illegible]} = 29$. ঐ শ্রেণীর t_{20} এবং t_n নির্ণয় কর।

24. কোন সমান্তর শ্রেণীর $t_9 = -7$ এবং $t_{16} = -24$. ঐ শ্রেণীর t_1 এবং t_{10} নির্ণয় কর।

25. কোন সমান্তর শ্রেণীর $t_2 = 11$, $t_8 = 53$. উহার $t_n =$ কত ?

26. কোন সমান্তর শ্রেণীর $t_8 = 23$, $t_p = 3p - 1$, শ্রেণীটি নির্ণয় কর।

27. কোন সমান্তর শ্রেণীর $t_p = c$, $t_q = d$. ঐ শ্রেণীর প্রথম পদ এবং সাধারণ অন্তর নির্ণয় কর। (C. U. 1934)

28. কোন সমান্তর শ্রেণীর $t_p = a$, $t_q = b$, ঐ শ্রেণীর t_n নির্ণয় কর।

29. a, b, c, d কোন সমান্তর শ্রেণীর পদ হইলে, প্রমাণ কর যে $a + d = b + c$.

30. কোন সমান্তর শ্রেণীর প্রথম পদ a এবং শেষ পদ l হইলে, প্রমাণ কর যে, প্রথম হইতে পঞ্চম পদ এবং শেষ হইতে পঞ্চম পদের সমষ্টি $a + l$.

31. প্রমাণ কর যে কোন সমান্তর শ্রেণীর প্রথম ও শেষ হইতে সমদূরবর্তী দুইটি পদের সমষ্টি ধ্রুবক।

10. সমান্তর মধ্যক (Arithmetic Mean)।

সমান্তর শ্রেণীভুক্ত তিনটি রাশির দ্বিতীয় রাশিটিকে প্রথম ও তৃতীয় রাশির সমান্তর মধ্যক বলে।

a, b, c সমান্তর শ্রেণীভুক্ত হইলে b-কে, a ও c-র সমান্তর মধ্যক বলা হয়।

দুইটি নির্দিষ্ট রাশির মধ্যে কতকগুলি রাশি বসিয়া একটি সমান্তর শ্রেণী গঠন করিলে উক্ত রাশিগুলিকে নির্দিষ্ট রাশিদ্বয়ের সমান্তর মধ্যক বলা হয়।

a এবং b এই দুইটি নির্দিষ্ট রাশির মধ্যে $m_1, m_2, m_3, m_4, \cdots m_n$ রাশিগুলি স্থাপন করিলে যদি $a, m_1, m_2, m_3, m_4, \cdots m_n, b$ একটি সমান্তর শ্রেণী গঠন করে, তাহা হইলে $m_1, m_2, m_3, m_4, \cdots m_n$ রাশিগুলি a এবং b-র মধ্যবর্তী n-সংখ্যক সমান্তর মধ্যক।

মধ্যকগুলি শ্রেণীর এক একটি পদ ছাড়া আর কিছুই নহে। সমান্তর মধ্যককে ইংরেজীতে সংক্ষেপে A. M. (Arithmetic Mean) বলা হয়।

11. দুইটি রাশির সমান্তর মধ্যক নির্ণয়।

মনে কর a এবং b-র মধ্যে একটি সমান্তর মধ্যক নির্ণয় করিতে হইবে।

ধর নির্ণেয় সমান্তর মধ্যক m,

তাহা হইলে, a, m, b একটি সমান্তর শ্রেণী,

$\therefore \quad m-a=b-m$ [প্রত্যেকেই সাধারণ অন্তরের সমান বলিয়া]

বা, $2m=a+b$

$$\therefore \quad m=\frac{a+b}{2}$$

অর্থাৎ দুইটি রাশির সমান্তর মধ্যক উহাদের সমষ্টির অর্ধ।

উদা. 1. 5 এবং 11-এর মধ্যে একটি সমান্তর মধ্যক নির্ণয় কর।

মনে কর নির্ণেয় মধ্যক m,

$\therefore \quad 5, m, 11$ একটি সমান্তর শ্রেণী,

$\therefore \quad m-5=11-m$

বা, $2m=11+5=16 \qquad \therefore \quad m=\frac{16}{2}=8.$

12. দুইটি রাশির মধ্যে n-সংখ্যক সমান্তর মধ্যক নির্ণয়।

a এবং c-এর মধ্যে n-সংখ্যক সমান্তর মধ্যক নির্ণয় করিতে হইবে।

মনে কর, b সাধারণ অন্তর এবং $m_1, m_2, m_3 \cdots m_n$ নির্ণেয় n-সংখ্যক মধ্যক।

$\therefore \quad m_1=a+b, \;\; m_2=a+2b, \;\; m_3=a+3b$ ইত্যাদি ; এবং

উক্ত শ্রেণীটি : $a, \; a+b, \; a+2b, \cdots a+nb, \; c$

প্রত্যেক মধ্যক একটি পদ। সুতরাং উক্ত শ্রেণীতে মোট $(n+2)$-সংখ্যক পদ আছে এবং $c=t_{n+2}$.

$\therefore \quad c=a+(n+2-1)b=a+(n+1)b$

$\therefore \quad (n+1)b=c-a \qquad \therefore \quad b=\frac{c-a}{n+1}$

$$m_1 = a + b = a + \frac{c-a}{n+1}$$

$$m_2 = a + 2b = a + \frac{2(c-a)}{n+1}$$

$$m_3 = a + 3b = a + \frac{3(c-a)}{n+1}$$

$$m_n = a + nb = a + \frac{n(c-a)}{n+1} \quad \text{বা,} \left[c - \frac{c-a}{n+1}\right]$$

কারণ, শেষ পদ c-এর পূর্ববর্তী পদ m_n এবং শেষ পদ হইতে সাধারণ অন্তর বিয়োগ করিলেই তৎপূর্ববর্তী পদ পাওয়া যায়।

উদা. 2. 2 এবং 57 এর মধ্যে 10-টি সমান্তর মধ্যক নির্ণয় কর। (C.U. '19)

মনে কর সাধারণ অন্তর b.

তাহা হইলে, $2, 2+b, 2+2b, \cdots 57$ এই শ্রেণীটির $(10+2)$-তম বা 12-তম পদ 57.

$\therefore \quad 57 = 2 + 11b, \quad \therefore \quad 11b = 55, \quad \therefore \quad b = 5$

$\therefore \quad m_1 = 2 + 5 = 7, m_2 = 2 + 2 \times 5 = 12, m_3 = 2 + 3 \times 5 = 17$ ইত্যাদি ;

অর্থাৎ নির্ণেয় মধ্যক 10টি : 7, 12, 17, 22, 27, 32, 37, 42, 47, 52.

উদা. 3. 4 এবং 30-র মধ্যে n-সংখ্যক সমান্তর মধ্যক আছে ; যদি চতুর্থ এবং শেষ মধ্যকের অনুপাত 3 : 7 হয়, তাহা হইলে n-এর মান কত ?

4 এবং 30-এর মধ্যে n-সংখ্যক মধ্যক আছে, সুতরাং 4 হইতে 30 পর্যন্ত সমান্তর শ্রেণীতে মোট $(n+2)$-সংখ্যক পদ আছে।

মনে কর উক্ত শ্রেণীর সাধারণ অন্তর b.

চতুর্থ মধ্যক $= t_5 = 4 + 4b$

শেষ মধ্যক = শেষের দিক হইতে দ্বিতীয় পদ,
$= 30 - b$.

$\dfrac{4+4b}{30-b} = \dfrac{3}{7}$ বা, $28 + 28b = 90 - 3b$

বা, $31b = 62, \quad \therefore \quad b = 2.$

এখন, $30 = t_{n+2}$
$= 4 + (n+1).2 = 2n + 6$

$\therefore \quad 2n = 24, \quad \therefore \quad n = 12.$

প্রশ্নমালা 4

নিম্নলিখিত দুই দুইটি সংখ্যার সমান্তর মধ্যক নির্ণয় কর :

1. 5, 15 **2.** 9, 21 **3.** −9, 13

4. x, y **5.** $(a+b)^2, (a-b)^2$ **6.** $3\frac{1}{2}, 8\frac{1}{2}$.

7. 3 এবং 15 এর মধ্যে 3টি সমান্তর মধ্যক স্থাপন কর।

8. 1 এবং 41-এর মধ্যে 7টি সমান্তর মধ্যক স্থাপন কর।

9. 4 এবং 324-এর মধ্যে 4টি সমান্তর মধ্যক স্থাপন কর।

10. 5 এবং 29-এর মধ্যে n-সংখ্যক সমান্তর মধ্যক আছে ; যদি প্রথম ও শেষ মধ্যকের অনুপাত 4 : 13 হয়, তাহা হইলে n-এর মান কত ?

11. 12 এবং 52-এর মধ্যে n-সংখ্যক মধ্যক আছে ; তৃতীয় এবং $(n-1)$-তম মধ্যকের অনুপাত 6 : 11 হইলে, n-এর মান কত ?

---

13. সমান্তর শ্রেণীর সমষ্টি নির্ণয়।

মনে কর কোন সমান্তর শ্রেণীর প্রথম পদ $=a$, সাধারণ অন্তর $=b$ এবং পদ-সংখ্যা $=n$. ঐ শ্রেণীর সমষ্টি নির্ণয় করিতে হইবে।

মনে কর নির্ণেয় সমষ্টি $=S$ এবং শেষ পদ $=l=t_n=a+(n-1)b$

সুতরাং, $S=a+(a+b)+(a+2b)+\cdots+(l-2b)+(l-b)+l \cdots \quad (i)$

শ্রেণীটি উল্টাভাবে লিখিয়া,

$$S=l+(l-b)+(l-2b)+\cdots+(a+2b)+(a+b)+a \cdots \quad (ii)$$

∴ (i) ও (ii) যোগ করিয়া,

$$2S=(a+l)+(a+l)+\cdots+(a+l)$$

$$=n(a+l) \qquad [\ n\text{-সংখ্যক } (a+l)\text{-এর সমষ্টি}\ ]$$

$$\therefore \quad S=\frac{n}{2}(a+l) \qquad \cdots (1)$$

কিন্তু $l = a + (n-1)b$.

$$\therefore \quad S = \frac{n}{2}\left\{a + a + (n-1)b\right\}$$

$$= \frac{n}{2}\left\{2a + (n-1)b\right\} \quad \cdots\cdots(2)$$

দ্রষ্টব্য। প্রথম এবং শেষ পদ দেওয়া থাকিলে (1)-সূত্রের সাহায্যে সমষ্টি নির্ণয় করা সুবিধাজনক।

উদা. 1. $1 + 2 + 3 + 4 + \cdots\cdots + 50$-এর সমষ্টি নির্ণয় কর।

এস্থলে, $a = 1$, $l = 50$, $n = 50$

$\therefore \quad S = \frac{50}{2}(1 + 50) = 25 \times 51 = 1275$ [(1)-সূত্রের প্রয়োগ।]

উদা. 2. $3 + 6 + 9 + 12 + \cdots\cdots$ শ্রেণীর 31-তম পদ পর্যন্ত সমষ্টি নির্ণয় কর।

এস্থলে, $a = 3$, $b = 6 - 3 = 3$, $n = 31$

$$\therefore \quad S = \frac{31}{2}\{2 \times 3 + (31 - 1) \times 3\}$$
$$= \frac{31}{2}(6 + 90)$$
$$= 31 \times 48 = 1488.$$

[(2)-সূত্রের প্রয়োগ।]

উদা. 3. সমষ্টি-সূত্রের সাহায্য না লইয়া $1 + 3 + 5 + 7 + \cdots\cdots$ শ্রেণীর n-তম পদ পর্যন্ত সমষ্টি নির্ণয় কর।

$$t_n = 1 + (n-1).2 = 2n - 1$$

$$S = 1 + 3 + 5 + \cdots\cdots + (2n-5) + (2n-3) + (2n-1)$$
$$S = (2n-1) + (2n-3) + (2n-5) + \cdots\cdots + 5 + 3 + 1$$

$$\therefore \quad 2S = 2n + 2n + 2n + \cdots\cdots\cdots\cdots + 2n$$
$$= 2n.n$$

$$\therefore \quad S = \frac{2n^2}{2} = n^2.$$

উদা. 4. $3 + 5 + 7 + \cdots\cdots\cdots$ এই শ্রেণীর কত পদের সমষ্টি 624 ?

(C. U. 1939 Sup.)

মনে কর নির্ণেয় পদ-সংখ্যা $= n$

$$\therefore \quad 624 = S = \frac{n}{2}\left\{2 \times 3 + (n-1) \times 2\right\}$$
$$= \frac{n}{2}\left\{2n + 4\right\}$$
$$= n(n+2) = n^2 + 2n.$$

অর্থাৎ, $n^2 + 2n = 624$

বা $n^2 + 2n - 624 = 0$

বা $(n+26)(n-24) = 0$

$\therefore \quad n = -26, 24.$

এখন, পদ-সংখ্যা ঋণরাশি হইতে পারে না। সুতরাং n-এর -26 মান গ্রহণযোগ্য নহে। অতএব এখানে $n = 24$.

অর্থাৎ পদ-সংখ্যা $= 24$.

উদা. 5. $1+2+5+6+9+10+\cdots\cdots$ শ্রেণীর (i) 30-তম পদ পর্যন্ত এবং (ii) 51-তম পদ পর্যন্ত সমষ্টি নির্ণয় কর।

(i) $1+2+5+6+9+10+\cdots\cdots$ (30-তম পদ পর্যন্ত)

$= (1+5+9+\cdots\cdots$15-তম পদ পর্যন্ত$)$

$\quad + (2+6+10+\cdots\cdots$15-তম পদ পর্যন্ত$)$

$= \frac{15}{2}\{2 \times 1 + 14 \times 4\} + \frac{15}{2}\{2 \times 2 + 14 \times 4\}$

$= \frac{15}{2}(2 + 56 + 4 + 56)$

$= \frac{15}{2} \times 118 = 15 \times 59 = 885$

(ii) $1+2+5+6+9+10+\cdots\cdots$শ্রেণীর 51-তম পদ পর্যন্ত

$= (1+5+9+\cdots\cdots$26-তম পদ পর্যন্ত$)$

$\quad + (2+6+10+\cdots\cdots$25-তম পদ পর্যন্ত$)$

$= \frac{26}{2}\{2 \times 1 + 25 \times 4\} + \frac{25}{2}\{2 \times 2 + 24 \times 4\}$

$= 13(2 + 100) + \frac{25}{2}(4 + 96)$

$= 13 \times 102 + \frac{25}{2} \times 100 = 1326 + 1250 = 2576$

উদা. 6. কোন সমান্তর শ্রেণীর প্রথম পদ 9 এবং শেষ পদ 96. ঐ শ্রেণীর সমষ্টি 1575 হইলে, সাধারণ অন্তর কত ?

মনে কর ঐ শ্রেণীর পদ-সংখ্যা $= n$ এবং সাধারণ অন্তর $= b$

প্রশ্ন অনুসারে, $S = 1575 = \frac{n}{2}(9 + 96) = \frac{105n}{2}$

$\because \quad n = 1575 \times \frac{2}{105} = 30.$

আবার, $96 = t_{30} = 9 + 29b \quad \therefore \quad 29b = 87. \quad \therefore \quad b = 3.$

$\therefore$ নির্ণেয় সাধারণ অন্তর $= 3$.

উদা. 7. কোন সমান্তর শ্রেণীর n-সংখ্যক পদের সমষ্টি 40, সাধারণ অন্তর 2 এবং শেষ পদ 13. n-এর মান নির্ণয় কর এবং n-এর দুইটি মানের তাৎপর্য লিখ।

মনে কর প্রথম পদ $= a$

এস্থলে, $13 = t_n = a + (n-1)2$

$= a + 2n - 2$

$\therefore \quad a = 15 - 2n.$

আবার, $S = 40 = \frac{n}{2}\left(a + 13\right)$

$= \frac{n}{2}\left(15 - 2n + 13\right)$

$= \frac{n}{2}\left(28 - 2n\right)$

$= n(14 - n)$

$= 14n - n^2$

$\therefore \quad n^2 - 14n + 40 = 0$ বা $(n-4)(n-10) = 0, \quad \therefore \quad n = 4$ বা 10

সুতরাং পদ-সংখ্যা 4 অথবা 10

$a = 15 - 2n = 15 - 8 = 7$ ($n = 4$ হইলে)

এবং $a = 15 - 2.10 = -5$ ($n = 10$ হইলে)

সুতরাং শ্রেণী দুইটি, এইরূপ

(i) $7 + 9 + 11 + 13 \quad (= 40)$

(ii) $-5 - 3 - 1 + 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13$

$= (-5 - 3 - 1 + 1 + 3 + 5) + 7 + 9 + 11 + 13$

$= 0 + 7 + 9 + 11 + 13 \quad (= 40)$

$n = 10$ হইলে প্রথম 6টি পদের সমষ্টি $= 0$, সুতরাং পদ-সংখ্যা 4 অথবা 10 হইলে, সমষ্টির কোন প্রভেদ হয় না।

সুতরাং n-এর উভয় মান গ্রহণযোগ্য।

উদা. 8. 200 ফুট গভীর একটি কূপ খনন করাইতে প্রথম ফুট খননের খরচ 1 টা. 2 আ. এবং পরবর্তী প্রত্যেক ফুটের খরচ তৎপূর্ববর্তী ফুটের খরচ অপেক্ষা 1 আনা করিয়া বেশী। কূপটি খনন করিতে মোট কত খরচ পড়িবে ? (C. U. '34)

এস্থলে প্রত্যেক ফুটের খরচ পর পর সাজাইলে ব্যয়সূচক রাশিগুলি একটি সমান্তর শ্রেণীতে পরিণত হইবে, যথা—

18 আনা, 19 আনা, 20 আনা, 21 আনা, ... ইত্যাদি

$\therefore$ এস্থলে, $a=18$, $b=1$ এবং $n=200$

$\therefore$ নির্ণেয় খরচ $= S$ (আনা) $= \frac{200}{2}\{2 \times 18 + (200-1) \times 1\}$ আনা

$= 100 \times 235$ আনা

$= 23500$ আনা $= 1468$ টাকা 12 আনা।

প্রশ্নমালা 5

নিম্নলিখিত শ্রেণীগুলির সমষ্টি নির্ণয় কর :

1. $1+2+3+\cdots\cdots$ 20-পদ পর্যন্ত।

2. $1+3+5+\cdots\cdots$ 35-পদ পর্যন্ত।

3. $2+4+6+8+\cdots\cdots$ 25-পদ পর্যন্ত।

4. $3+7+11+15+\cdots\cdots$ 15-পদ পর্যন্ত।

5. $6+4+2+\cdots\cdots$ 20-পদ পর্যন্ত।

6. $a+(a+b)+(a+2b)\cdots\cdots$ 10-পদ পর্যন্ত।

7. $a+(a-b)+(a-2b)\cdots\cdots$ 10-পদ পর্যন্ত।

8. $n+(n+1)+(n+2)+\cdots\cdots$ 8-পদ পর্যন্ত।

9. $5+1-3-7-\cdots\cdots$ 12-পদ পর্যন্ত।

10. $2n+(3n+1)+(4n+2)+\cdots\cdots$ n-পদ পর্যন্ত।

11. কোন সমান্তর শ্রেণীর প্রথম দুইটি পদ যথাক্রমে 3 এবং 1 ; 10-তম পদ এবং প্রথম 10-পদের সমষ্টি নির্ণয় কর। (C. U. 1913)

12. সমষ্টি-সূত্রের সাহায্য ব্যতীত $1+3+5+\cdots\cdots$ শ্রেণীর 40টি পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

13. $17+5-7\cdots\cdots$এই শ্রেণীর কতগুলি পদের সমষ্টি -78 ? (D. B. '31)

14. $7+9+11+\cdots+65$ এই শ্রেণীর সমষ্টি নির্ণয় কর।

15. 750 হইতে 1000 পর্যন্ত 13-এর সমস্ত গুণিতকের সমষ্টি নির্ণয় কর। (C. U. 1935)

16. $3+4+8+9+13+14+\cdots$এর (*i*) 20-পদ পর্যন্ত (*ii*) 101-পদ পর্যন্ত সমষ্টি নির্ণয় কর।

17. প্রমাণ কর যে $4+12+20+\cdots$এই শ্রেণীর n-পদের সমষ্টি একটি যুগ্ম সংখ্যার বর্গ। (C. U. 1927, 1939)

18. 20 হইতে 80 পর্যন্ত ক্রমিক সংখ্যাগুলির সমষ্টি নির্ণয় কর।

19. 10 হইতে 100 পর্যন্ত ক্রমিক যুগ্ম সংখ্যাগুলির সমষ্টি নির্ণয় কর।

20. 11 হইতে 99 পর্যন্ত ক্রমিক অযুগ্ম সংখ্যাগুলির সমষ্টি নির্ণয় কর।

21. $2+8+14+\cdots$এই শ্রেণীর কতগুলি পদের সমষ্টি 352 ? (C. U. 1949)

22. $21+19+17+\cdots$এই শ্রেণীর n-পদের সমষ্টি 120. শেষ পদ এবং n-এর মান নির্ণয় কর। (D. B. 1947)

23. কোন সমান্তর শ্রেণীর প্রথম ও দ্বিতীয় পদ যথাক্রমে $1\frac{1}{2}$ এবং $2\frac{1}{3}$. ঐ শ্রেণীর কয়টি পদের যোগফল 171 ? (D. B. 1940)

24. কোন সমান্তর শ্রেণীর n-সংখ্যক পদের সমষ্টি n^2. প্রথম পদ এবং সাধারণ অন্তর নির্ণয় কর। (G. U. 1948)

25. কোন সমান্তর শ্রেণীর n-তম পদ $2n-1$ হইলে উহার n-পদের সমষ্টি কত ?

26. প্রথম মাসে 5 টাকা দিয়া পরবর্তী প্রতি মাসে 1 টাকা করিয়া বেশী দিলে, কত মাসে 126 টাকার ঋণ শোধ হইবে ?

27. কোন অধমর্ণ প্রথম মাসে 100 টাকা দিয়া পরবর্তী প্রতি মাসে 10 টাকা করিয়া কম দিয়া 10 মাসে একটি ঋণ শোধ করিল, ঋণের পরিমাণ কত ?

28. $2+4+7+9+12+14+\cdots\cdots$শ্রেণীটির n-পদের সমষ্টি নির্ণয় কর. (*i*) যখন n-যুগ্ম সংখ্যা এবং (*ii*) যখন n-অযুগ্ম সংখ্যা।

14. স্বাভাবিক সংখ্যা-ঘটিত শ্রেণী।

1, 2, 3, 4, ইত্যাদি ক্রমিক সংখ্যাগুলিকে **স্বাভাবিক সংখ্যা** (Natural numbers) বলে।

(i) প্রথম n-সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার সমষ্টি।

নির্ণেয় সমষ্টি S হইলে,

$$S = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$$
$$= \frac{n}{2}\{2 + (n-1).1\}$$
$$= \frac{n}{2}(n+1).$$

(ii) প্রথম n-সংখ্যক অযুগ্ম স্বাভাবিক সংখ্যার সমষ্টি।

নির্ণেয় সমষ্টি S হইলে,

$$S = 1 + 3 + 5 + 7 + \cdots n\text{-সংখ্যক পদ পর্যন্ত}$$
$$= \frac{n}{2}\{2 + (n-1)2\}$$
$$= \frac{n}{2}.2n = n^2.$$

(iii) প্রথম n-সংখ্যক যুগ্ম স্বাভাবিক সংখ্যার সমষ্টি।

নির্ণেয় সমষ্টি S হইলে,

$$S = 2 + 4 + 6 + 8 + \cdots n\text{-সংখ্যক পদ পর্য্যন্ত}$$
$$= \frac{n}{2}\{4 + (n-1)2\}$$
$$= \frac{n}{2}(2n+2).$$
$$= n(n+1).$$

(iv) প্রথম n-সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার বর্গের সমষ্টি।

মনে কর, $S = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$

n-এর যে কোন্ মানের জন্য

$$n^3 - (n-1)^3 = 3n^2 - 3n + 1. \quad \text{(একটি অভেদ)}$$

এখন, উক্ত অভেদে n-এর মান যথাক্রমে 1, 2, 3,……লিখিয়া

$$1^3 - 0^3 = 3.1^2 - 3.1 + 1$$
$$2^3 - 1^3 = 3.2^2 - 3.2 + 1$$
$$3^3 - 2^3 = 3.3^2 - 3.3 + 1$$

$$n^3 - (n-1)^3 = 3.n^2 - 3n + 1$$

যোগ করিয়া, $n^3 = 3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) - 3(1 + 2 + 3 + \cdots + n) + n$

$$= 3S - \frac{3n(n+1)}{2} + n$$

$$\therefore\ 3S = n^3 + \frac{3n(n+1)}{2} - n = n\frac{2n^2 + 3n + 3 - 2}{2}$$

$$= n.\frac{2n^2 + 3n + 1}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$$

$$\therefore\quad S = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

(v) প্রথম n-সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার ঘন-এর সমষ্টি।

মনে কর, $S = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3$.

n-এর যে কোন মানের জন্য,

$$n^4 - (n-1)^4 = 4n^3 - 6n^2 + 4n - 1 \qquad \text{(একটি অভেদ)}$$

উক্ত অভেদে n-এর মান যথাক্রমে 1, 2, 3,……লিখিয়া,

$$1^4 - 0^4 = 4.1^3 - 6.1^2 + 4.1 - 1$$
$$2^4 - 1^4 = 4.2^3 - 6.2^2 + 4.2 - 1$$
$$3^4 - 2^4 = 4.3^3 - 6.3^2 + 4.3 - 1$$

$$n^4 - (n-1)^4 = 4.n^3 - 6.n^2 + 4.n - 1$$

যোগ করিয়া, $n^4 = 4(1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3) - 6(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2)$
$+ 4(1 + 2 + 3 + \cdots + n) - n$

$$= 4S - 6.\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{4.n(n+1)}{2} - n$$

$$= 4S - n(n+1)(2n+1) + 2n(n+1) - n$$

$$\therefore\quad 4S = n^4 + n + n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1)$$
$$= n(n^3+1) + n(n+1)(2n-1)$$
$$= n(n+1)(n^2 - n + 1 + 2n - 1)$$
$$= n(n+1)(n^2+n) = n^2(n+1)^2$$
$$\therefore\quad S = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$$

দ্রষ্টব্য। $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots\cdots + n^3 = (1+2+3+\cdots+$

নিম্নলিখিত সাঙ্কেতিক চিহ্ন কয়টির ব্যবহার জানা থাকিলে সমষ্টি নির্ণয়ের বিশেষ সুবিধা হয় :

$$\Sigma n = 1 + 2 + 3 + \cdots\cdots + n \quad [\Sigma \text{ (sigma)}]$$
$$\Sigma n^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots\cdots + n^2.$$
$$\Sigma n^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots\cdots + n^3.$$ ইত্যাদি।

15. বিবিধ জটিল শ্রেণীর সমষ্টি নির্ণয়।

উদা. 1. $1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots\cdots$ n-পদ পর্যন্ত সমষ্টি নির্ণয় কর।

উক্ত শ্রেণীর $t_n = \{1 + (n-1)2\}^2 = (2n-1)^2$
$$= 4n^2 - 4n + 1.$$

এখন, $n = 1, 2, 3, \cdots n$ বসাইয়া,

$$t_1 = 4.1^2 - 4.1 + 1$$
$$t_2 = 4.2^2 - 4.2 + 1$$
$$t_3 = 4.3^2 - 4.3 + 1.$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$t_n = 4n^2 - 4n + 1.$$

$$\therefore\quad S = 4(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) - 4(1 + 2 + 3 + \cdots + n) + n.$$
$$= \frac{4.n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{4n(n+1)}{2} + n.$$
$$= \frac{2n(n+1)(2n+1) - 6n(n+1) + 3n}{3}$$
$$= \frac{n}{3}\left\{2(n+1)(2n+1) - 6(n+1) + 3\right\}$$
$$= \frac{n}{3}\left(4n^2 + 6n + 2 - 6n - 6 + 3\right)$$
$$= \frac{n}{3}\left(4n^2 - 1\right).$$

(Σ-সাঙ্কেতিকের সাহায্যে)

উক্ত শ্রেণীর $t_n = 4n^2 - 4n + 1$.

$$\therefore \quad S = 4\Sigma n^2 - 4\Sigma n + n$$

$$= \frac{4n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{4n(n+1)}{2} + n.$$

(অবশিষ্ট পূর্ব্ববৎ)

উদা. 2. $1.2 + 2.3 + 3.4 + \cdots$ n-পদ পর্যন্ত সমষ্টি নির্ণয় কর।

এস্থলে $= t_n =$ (1, 2, 3⋯এর n-তম পদ) (2, 3, 4⋯এর n-তম পদ)

$$= n(n+1) = n^2 + n$$

$$\therefore \quad S = \Sigma n^2 + \Sigma n$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{n(n+1)}{2}\left\{\frac{2n+4}{3}\right\}$$

$$= \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

উদা. 3. $1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + \cdots$ n-তম পদ পর্যন্ত সমষ্টি নির্ণয় কর।

এস্থলে, $t_n =$ (1, 2, 3,⋯এর n-তম পদ) × (2, 3, 4,⋯n-তম পদ)

× (3, 4, 5,⋯এর n-তম পদ)

$$= n(n+1)(n+2)$$

$$= n^3 + 3n^2 + 2n$$

$$\therefore \quad S = \Sigma n^3 + 3\Sigma n^2 + 2\Sigma n$$

$$= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{3n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{2n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{n(n+1)}{2}\left\{\frac{n^2 + n + 4n + 2 + 4}{2}\right\}$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} \cdot \frac{n^2 + 5n + 6}{2}$$

$$= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}.$$

উদা. 4. $1+(1+2)+(1+2+3)+\cdots n$-তম পদ পর্যন্ত সমষ্টি নির্ণয় কর।

এস্থলে, $t_n = 1+2+3+4+\cdots+n$

$$=\frac{n(n+1)}{2}=\tfrac{1}{2}n^2+\tfrac{1}{2}n$$

$$\therefore\quad S=\tfrac{1}{2}\Sigma n^2+\tfrac{1}{2}\Sigma n$$

$$=\tfrac{1}{2}.\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\tfrac{1}{2}.\frac{n(n+1)}{2}$$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{12}+\frac{n(n+1)}{4}=\frac{n(n+1)}{4}\left\{\frac{2n+4}{3}\right\}$$

$$=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

উদা. 5. $1+(2+3)+(4+5+6)+\cdots n$-তম পদ পর্যন্ত সমষ্টি নির্ণয় কর।

এস্থলে বন্ধনীগুলি তুলিয়া লইলে 1, 2, 3, 4 ইত্যাদি স্বাভাবিক সংখ্যাগুলি পাওয়া যায়। উক্ত শ্রেণীর প্রথম পদে একটি, দ্বিতীয় পদে দুইটি, তৃতীয় পদে তিনটি সংখ্যা আছে। সুতরাং ঐ শ্রেণীর n-সংখ্যক পদে $(1+2+3+4+\cdots+n)$-সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যা আসিবে। কিন্তু, $1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

$\therefore\quad 1+(2+3)+(4+5+6)+\cdots n$-পদ পর্যন্ত সমষ্টি

$=1+2+3+4+5+6+\cdots\dfrac{n(n+1)}{2}$-পদ পর্যন্ত সমষ্টি

$=\tfrac{1}{2}.\dfrac{n(n+1)}{2}.\left\{\dfrac{n(n+1)}{2}+1\right\}$ [পদ-সংখ্যা $\dfrac{n(n+1)}{2}$ ধরিয়া]

$$=\frac{n(n+1)}{4}.\left\{\frac{n^2+n+2}{2}\right\}=\frac{n(n+1)(n^2+n+2)}{8}.$$

উদা. 6. $1.3^2+2.4^2+3.5^2+\cdots n$-পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

$t_n=$ (1, 2, 3, ... এর n-তম পদ) $\times$ (3, 4, 5, ... এর n-তম পদ)^2

$$=n.\{3+(n-1).1\}^2$$

$$=n(n+2)^2=n^3+4n^2+4n$$

$$\therefore\quad S=\Sigma n^3+4.\Sigma n^2+4\Sigma n$$

$$=\frac{n^2(n+1)^2}{4}+\frac{4n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{4n(n+1)}{2}.$$

$$= n(n+1)\left\{\frac{n(n+1)}{4}+\frac{2(2n+1)}{3}+2\right\}$$

$$= n(n+1)\left\{\frac{3n^2+3n+16n+8+24}{12}\right\}$$

$$= \frac{n(n+1)(3n^2+19n+32)}{12}.$$

উদা. 7. $\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+\cdots$ n-পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

(W. B. S. F. 1953)

$$t_n = \frac{1}{\{1+(n-1)2\}\{3+(n-1)2\}} = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

এস্থলে, $t_1 = \frac{1}{1.3} = \frac{1}{2}(\frac{1}{1}-\frac{1}{3})$

$t_2 = \frac{1}{3.5} = \frac{1}{2}(\frac{1}{3}-\frac{1}{5})$

$t_3 = \frac{1}{5.7} = \frac{1}{2}(\frac{1}{5}-\frac{1}{7})$

....

$$t_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right\}$$

$$\therefore \quad S = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right) = \frac{n}{2n+1}$$

উদা. 8. $\frac{1}{1\times3\times5}+\frac{1}{3\times5\times7}+\frac{1}{5\times7\times9}+\cdots$ n-পদ পর্যন্ত সমষ্টি নির্ণয় কর

$t_1 = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1\times3}-\frac{1}{3\times5}\right)$ 1, 3, 5,$\cdots$শ্রেণীর $t_n = 1+(n-1)2 = 2n-1$

$t_2 = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3\times5}-\frac{1}{5\times7}\right)$ 3, 5, 7,$\cdots$শ্রেণীর $t_n = 3+(n-1)2 = 2n+1$

$t_3 = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{5\times7}-\frac{1}{7\times9}\right)$ 5, 7, 9 শ্রেণীর $t_n = 5+(n-1)2 = 2n+3.$

$$= \frac{1}{4}\left\{\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}-\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}\right\}$$

$$\therefore \quad S = t_1 + t_2 + t_3 + \cdots + t_n$$

$$= \tfrac{1}{4}\left\{\frac{1}{1 \times 3} - \frac{1}{(2n+1)(2n+3)}\right\}$$

$$= \tfrac{1}{4}\left\{\frac{(2n+1)(2n+3) - 3}{3(2n+1\ (2n+3)}\right\}$$

$$= \tfrac{1}{4}\left\{\frac{4n^2 + 8n}{3(2n+1)(2n+3)}\right\}$$

$$= \tfrac{1}{4}\left\{\frac{4n(n+2)}{3(2n+1)(2n+3)}\right\}$$

$$= \frac{n(n+2)}{3(2n+1)(2n+3)}.$$

উদা. 9. $1 + 3 + 8 + 16 + 27 + \cdots$ n-পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

মনে কর সমষ্টি $= S$ এবং n-তম পদ $= t_n$.

$$\therefore \quad S = 1 + 3 + 8 + 16 + 27 + \cdots\cdots + t_n$$

এবং $S = \quad 1 + 3 + \ 8 + 16 + \cdots \cdots + t_{n-1} + t_n$

বিয়োগ করিয়া, $0 = 1 + 2 + 5 + \ 8 + 11 +$ n-সংখ্যক পদ পর্যন্ত $- t_n$

$\therefore \quad t_n = 1 + 2 + 5 + 8 + 11 + \cdots\cdots$ n-তম পদ পর্যন্ত

$= 1 + \{2 + 5 + 8 + 11 + \cdots (n-1)$-তম পদ পর্যন্ত$\}$

$$= 1 + \frac{n-1}{2}\Big\{4 + (n-2)3\Big\}$$

$$= 1 + \frac{n-1}{2} \cdot \ (3n - 2)$$

$$= \frac{3n^2 - 5n + 4}{2} = \tfrac{3}{2}n^2 - \tfrac{5}{2}n + 2.$$

$$\therefore \quad S = \tfrac{3}{2}\Sigma n^2 - \tfrac{5}{2}\Sigma n + 2n$$

$$= \tfrac{3}{2}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \tfrac{5}{2}\frac{n(n+1)}{2} + 2n$$

$$= n\left\{\frac{2n^2 + 3n + 1 - 5n - 5 + 8}{4}\right\}$$

$$= n\left\{\frac{2n^2 - 2n + 4}{4}\right\} = \frac{n}{2}\Big(n^2 - n + 2\Big).$$

উদা. 10. $1+(1+3)+(1+3+5)\cdots\cdots n$-পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

$S=1+(1+3)+(1+3+5)+\cdots\cdots n$-পদ পর্যন্ত

$=1+4+9+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots n$-পদ পর্যন্ত

$=1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots\cdots+n^2$

$=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

প্রশ্নমালা 6

n-পদের সমষ্টি নির্ণয় কর :

1. $1^3+3^3+5^3+\cdots$
2. $2^2+5^2+8^2+\cdots$
3. $5^2+8^2+11^2+\cdots$
4. $1.2^2+2.3^2+3.4^2+$
5. $3.7+5.10+7.13+\cdots$
6. $2.3+3.4+4.5+\cdots$
7. $1.7+3.9+5.11+\ldots$
8. $1.4^2+2.5^2+3.6^2+$
9. $1^2+(1^2+2^2)+(1^2+2^2+3^2)+\cdots$
10. $3.4.5+4.5.6+5.6.7+\cdots$
11. $\frac{1}{2.4}+\frac{1}{4.6}+\frac{1}{6\cdot 8}+\cdots\cdots$
12. $\frac{1}{3.8}+\frac{1}{8.13}+\frac{1}{13.18}+$
13. $1+3+6+10+15+21+\cdots$
14. $2+5+9+14+20+\cdots$
15. $3+8+14+21+29$
16. $1+5+11+19+\cdots$
17. $\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\frac{1}{3.4.5}+\cdots$

16. সমান্তর শ্রেণী সম্বন্ধীয় বিবিধ প্রশ্নের সমাধান।

উদা. 1. কোন সমান্তর শ্রেণীর n-পদের সমষ্টি $5n^2+7n$. প্রথম পদ দুইটি নির্ণয় কর। (C. U. 1941)

মনে কর n-পদের সমষ্টিকে s_n দ্বারা সূচিত করা হইল।

$\therefore\ s_n=5.n^2+7.n.$

$\therefore\ s_1=5.1^2+7.1$ ($=$ প্রথম পদের সমষ্টি, অর্থাৎ প্রথম পদ)

$=12$

$s_2 = 5.2^2 + 7.2$ (= প্রথম দুই পদের সমষ্টি)

$= 34$

$\therefore \quad t_1 = 12$

$t_2 = s_2 - t_1 = 34 - 12 = 22$

অর্থাৎ $t_1 = 12, \quad t_2 = 22.$

(অন্য প্রকার)

n-পদের সমষ্টি $= 5n^2 + 7n$

$\therefore \quad (n-1)$ পদের সমষ্টি $= 5(n-1)^2 + 7(n-1)$

$= 5n^2 - 10n + 5 + 7n - 7$

$= 5n^2 - 3n - 2$

$\therefore \quad n$-তমপদ $= (5n^2 + 7n) - (5n^2 - 3n - 2) = 10n + 2$

$t_1 = 10.1 + 2 = 12$

$t_2 = 10.2 + 2 = 22$

উদা. 2. কোন সমান্তর শ্রেণীর p-পদের সমষ্টি q এবং p-পদের সমষ্টি p; উহার $(p+q)$-পদের সমষ্টি নির্ণয় কর। (C. U. 1950)

মনে কর, প্রথম পদ $= a$, সাধারণ অন্তর $= b$,

$\therefore \quad \frac{p}{2}\left\{2a + (p-1)b\right\} = q \quad (i)$

এবং $\frac{q}{2}\left\{2a + (q-1)b\right\} = p \quad (ii)$

$\therefore$ (i) হইতে, $2ap + p^2b - pb = 2q \quad (iii)$

(ii) হইতে, $2aq + q^2b - qb = 2p \quad (iv)$

$\therefore \quad (iii) - (iv) = 2a(p-q) + b(p^2 - q^2) - b(p-q) = -2(p-q)$

$\therefore \quad 2a + b(p+q) - b = -2.$

বা, $2a + b(p+q-1) = -2.$

এখন, $S_{p+q}=\frac{p+q}{2}\left\{2a+(p+q-1)b\right\}$

$$=\frac{p+q}{2}\times(-2)=-(p+q)$$

উদা. 3. কোন সমান্তর শ্রেণীর p, q, r পদের সমষ্টি যথাক্রমে a, b এবং c;

প্রমাণ কর : $\frac{a}{p}\left(q-r\right)+\frac{b}{q}\left(r-p\right)+\frac{c}{r}\left(p-q\right)=0.$

মনে কর ঐ শ্রেণীর $t_1=A$, এবং সাধারণ অন্তর $=B$.

$$\therefore\ \frac{p}{2}\left\{2A+(p-1)B\right\}=a\quad (i)\quad \therefore\ 2A+(p-1)B=\frac{2a}{p}\quad (iv)$$

$$\frac{q}{2}\left\{2A+(q-1)B\right\}=b\quad (ii)\quad \therefore\ 2A+(q-1)B=\frac{2b}{q}\quad (v)$$

$$\frac{r}{2}\left\{2A+(r-1)B\right\}=c\quad (iii)\quad \therefore\ 2A+(r-1)B=\frac{2c}{r}\quad (vi)$$

$$\therefore\ (iv)-(v)=(p-q)B=2\left(\frac{a}{p}-\frac{b}{q}\right)\quad \cdots(vii)$$

$$(v)-(vi)=(q-r)B=2\left(\frac{b}{q}-\frac{c}{r}\right)\quad \cdots(vii)$$

$$(vii)\div(viii)=\frac{p-q}{q-r}=\frac{\frac{a}{p}-\frac{b}{q}}{\frac{b}{q}-\frac{c}{r}}$$

$$\therefore\ \frac{a}{p}\left(q-r\right)-\frac{b}{q}\left(q-r\right)=\frac{b}{q}\left(p-q\right)-\frac{c}{r}\left(p-q\right)$$

বা, $\frac{a}{p}\left(q-r\right)-\frac{b}{q}\left(q-r\right)-\frac{b}{q}\left(p-q\right)+\frac{c}{r}\left(p-q\right)=0.$

বা, $\frac{a}{p}\left(q-r\right)+\frac{b}{q}\left(r-p\right)+\frac{c}{r}\left(p-q\right)=0.$

উদা. 4. কোন সমান্তর শ্রেণীর $t_p = a$, $t_q = b$; প্রমাণ কর যে প্রথম $(p+q)$ পদের সমষ্টি $\frac{p+q}{2}\left\{a+b+\frac{a-b}{p-q}\right\}$.

মনে কর $t_1 = \mathrm{A}$, সাধারণ অন্তর $= \mathrm{B}$

$\therefore$ $\mathrm{A}+(p-1)\mathrm{B}=a$ এবং $\mathrm{A}+(q-1)\mathrm{B}=b$

$\therefore$ যোগ করিয়া, $a+b=2\mathrm{A}+(p+q-2)\mathrm{B}$.

এবং বিয়োগ করিয়া, $\mathrm{B}(p-q)=a-b$ $\quad\therefore\quad \mathrm{B}=\frac{a-b}{p-q}$

এখন, $S_{p+q}=\frac{p+q}{2}\left\{2\mathrm{A}+(p+q-1)\mathrm{B}\right\}$

$$=\frac{p+q}{2}\left\{2\mathrm{A}+(p+q-2)\mathrm{B}+\mathrm{B}\right\}$$

$$=\frac{p+q}{2}\left\{a+b+\frac{a-b}{p-q}\right\}.$$

উদা. 5. কোন সমান্তর শ্রেণীর $t_p=a$, $t_q=b$, $t_r=c$; প্রমাণ কর যে, $a(q-r)+b(r-p)+c(p-q)=0$. (C. U. 1946)

মনে কর ঐ শ্রেণীর, $t_1 = \mathrm{A}$ এবং সাধারণ অন্তর $= \mathrm{B}$.

$\therefore$ $\mathrm{A}+(p-1)\mathrm{B}=a \cdots\cdots\cdots (i)$

$\mathrm{A}+(q-1)\mathrm{B}=b \cdots\cdots\cdots (ii)$

$\mathrm{A}+(r-1)\mathrm{B}=c \cdots\cdots\cdots (iii)$

$\therefore$ $(i)-(ii)=(p-q)\mathrm{B}=a-b \cdots\cdots (iv)$

$\therefore$ $(ii)-(iii)=(q-r)\mathrm{B}=b-c \cdots\cdots (v)$

$\therefore$ $\frac{p-q}{q-r}=\frac{a-b}{b-c}$ $\quad(iv)$ কে (v) দ্বারা ভাগ করিয়া,

$\therefore$ $a(q-r)-b(q-r)=b(p-q)-c(p-q)$

বা, $a(q-r)-b(q-r)-b(p-q)+c(p-q)=0$

বা, $a(q-r)+b(r-q)-b(p-q)+c(p-q)=0$

বা, $a(q-r)+b(r-q-p+q)+c(p-q)=0$

বা, $a(q-r)+b(r-p)+c(p-q)=0$.

উদা. 6. কোন সমান্তর শ্রেণীর তিনটি ক্রমিক পদের সমষ্টি 24 এবং গুণফল 440 ; সংখ্যা তিনটি নির্ণয় কর।

মনে কর সংখ্যা তিনটি $a-b, a, a+b$

$\therefore \quad (a-b)+a+(a+b)=24 \cdots\cdots (i)$

এবং $(a-b).a.(a+b)=440 \quad \cdots\cdots (ii)$

(i) হইতে, $3a=24$; $\quad \therefore \quad a=8$

(ii) হইতে, $8(a^2-b^2)=440$

বা. $a^2-b^2=55$

বা, $64-b^2=55$

$\therefore \quad b^2=9, \qquad \therefore \quad b=\pm 3.$

$\therefore$ সংখ্যা তিনটি $a-b, a, a+b$ বা $8-3, 8, 8+3$ বা $5, 8, 11$

অথবা, $8+3, 8, 8-3=11, 8, 5.$

উদা. 7. চারিটি সংখ্যা সমান্তর শ্রেণীভুক্ত। প্রথম ও চতুর্থটির সমষ্টি 10 এবং দ্বিতীয় ও তৃতীয়টির গুণফল 24. সংখ্যা চারিটি নির্ণয় কর।

মনে কর সংখ্যা চারিটি : $a-3b, a-b, a+b, a+3b.$

$\therefore \quad (a-3b)+(a+3b)=10\cdots(i)$

এবং $(a-b)(a+b) \quad =24\cdots(ii)$

এখন, (i) হইতে, $2a=10 \quad \therefore \quad a=5.$

(ii) হইতে, $a^2-b^2=24$ বা $25-b^2=24$

$\therefore \quad b^2=1, \quad b=\pm 1.$

$\therefore$ সংখ্যা চারিটি : 2, 4, 6, 8

অথবা 8, 6, 4, 2

উদা. 8. x, y, z, সমান্তর শ্রেণীভুক্ত হইলে, প্রমাণ কর যে $xy+yz=2y^2$

x, y, z সমান্তর শ্রেণীভুক্ত

$\therefore \quad y-x=z-y$

$\therefore \quad 2y=x+z.$

$\therefore \quad 2y^2=xy+yz$ (উভয় পক্ষকে y দ্বারা গুণ করিয়া).

উদা. 9. a, b, c সমান্তর শ্রেণীভুক্ত ; প্রমাণ কর :

$$\frac{1}{bc}, \frac{1}{ca}, \frac{1}{ab}$$ সমান্তর শ্রেণীভুক্ত।

a, b, c সমান্তর শ্রেণীভুক্ত ;

$\therefore \frac{a}{abc}, \frac{b}{abc}, \frac{c}{abc}$ সমান্তর শ্রেণীভুক্ত (abc দ্বারা প্রত্যেককে ভাগ করিয়া)

অর্থাৎ $\frac{1}{bc}, \frac{1}{ca}, \frac{1}{ab}$ সমান্তর শ্রেণীভুক্ত।

উদা. 10. $\frac{b+c}{a}, \frac{c+a}{b}, \frac{a+b}{c}$ সমান্তর শ্রেণীভুক্ত ; প্রমাণ কর যে

$$\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$$ সমান্তর শ্রেণীভুক্ত।

$\frac{b+c}{a}, \frac{c+a}{b}, \frac{a+b}{c}$ সমান্তর শ্রেণীভুক্ত,

$\therefore \frac{b+c}{a}+1, \frac{c+a}{b}+1, \frac{a+b}{c}+1$ সমান্তর শ্রেণীভুক্ত ;

$\frac{a+b+c}{a}, \frac{a+b+c}{b}, \frac{a+b+c}{c}$ সমান্তর শ্রেণীভুক্ত ;

$\therefore \frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ সমান্তর শ্রেণীভুক্ত (প্রত্যেককে $a+b+c$ দ্বারা ভাগ করিয়া)

উদা. 11. a, b, c সমান্তর শ্রেণীভুক্ত ; প্রমাণ কর যে

$$(a+2b-c)(2b+c-a)(c+a-b)=4abc.$$

a, b, c সমান্তর শ্রেণীভুক্ত ; $\therefore \; a+c=2b.$

$$(a+2b-c)(2b+c-a)(c+a-b)$$
$$=(a+a+c-c)(a+c+c-a)(2b-b)$$
$$=2a.2c.b=4abc.$$

উদা. 12. কোন চতুর্ভুজের কোণ চারিটি সমান্তর শ্রেণীতে আছে ; সাধারণ অন্তর 20° হইলে, কোণ চারিটির পরিমাণ নির্ণয় কর।

মনে কর কোণ চারিটির ডিগ্রী পরিমাণ

$$a, \; a+20, \; a+40, \; a+60.$$

$\therefore \; a+a+20+a+40+a+60=360$

বা, $4a=240 \quad \therefore \; a=60$

$\therefore$ কোণ চারিটি : 60°, 80°, 100°, 120°.

উদা. 13. প্রথম দিন 30 মাইল, দ্বিতীয় দিন 27 মাইল, তৃতীয় দিন 24 মাইল, এই ক্রমে চলিলে 162 মাইল পথ অতিক্রম করিতে কত দিন লাগিবে ?

স্পষ্টতঃ প্রত্যেক দিনের অতিক্রান্ত পথ একটি সমান্তর শ্রেণী উৎপন্ন করিতেছে, যাহার প্রথম পদ 30, সাধারণ অন্তর -3 এবং পদ সমষ্টি 162.

মনে কর নির্ণেয় দিনের সংখ্যা $= n$

$$\therefore \quad 162 = \frac{n}{2}\{2.30 + (n-1) \times (-3)\} = \frac{n}{2}(63 - 3n)$$

$$\therefore \quad 324 = 63n - 3n^2 \quad \text{বা,} \quad 108 = 21n - n^2$$

$$\text{বা,} \quad n^2 - 21n + 108 = 0 \quad \text{বা,} \quad (n-9)(n-12) = 0$$

$$\therefore \quad n = 9 \quad \text{বা,} \quad 12.$$

এস্থলে নির্ণেয় দিন-সংখ্যা 9. ($\because$ 9 দিনেই 162 মাইল চলা শেষ হইবে)

উদা. 14. কোন কর্ম্মচারীর প্রারম্ভিক মাসিক বেতন 100 টাকা। প্রতি বৎসর 10 টাকা করিযা মাসিক বেতন বৃদ্ধি হইলে, 20 বৎসরে তাহার মোট আয় কত হইবে ?

প্রথম বৎসরের আয় $= 100 \times 12 = 1200$ টাকা।

প্রতি বৎসরে তাহার বেতন বৃদ্ধি হয় $10 \times 12 = 120$ টাকা করিয়া। তাহার বিভিন্ন বৎসরের আয় একটি সমান্তর শ্রেণী গঠন করে, যাহার প্রথম পদ 1200, এবং সাধারণ অন্তর 120.

এস্থলে উক্ত শ্রেণীর 20 পদের সমষ্টি দ্বারা তাহার মোট আয নির্ণীত হইবে।

সুতরাং, মোট আয় (S) $= \frac{20}{2}\{2 \times 1200 + (20-1) \times 120\}$ টাকা

0) টা. $= 10(2400 + 2280)$ টা. $= 46800$ টাকা।

প্রশ্নমালা 7

1. কোন সমান্তর শ্রেণীর n-পদের সমষ্টি $2n^2 + n$; ঐ শ্রেণীর প্রথম 5 পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

2. কোন সমান্তর শ্রেণীর n-পদের সমষ্টি $5n^2 - 2n$; ঐ শ্রেণীর প্রথম তিনটি পদ নির্ণয় কর।

3. a, b, c সমান্তর শ্রেণীতে থাকিলে, প্রমাণ কর $b+c, c+a, a+b$ সমান্তর শ্রেণীভুক্ত হইবে।

4. কোন সমান্তর শ্রেণীর প্রথম p, q, r-পদের সমষ্টি যথাক্রমে x, y, z হইলে, প্রমাণ কর যে $xqr(q-r)+yrp(r-p)+zpq(p-q)=0$

5. $(b-c)^2, (c-a)^2, (a-b)^2$ সমান্তর শ্রেণীতে থাকিলে, প্রমাণ কর যে

$$\frac{1}{b-c}, \frac{1}{c-a}, \frac{1}{a-b}$$ সমান্তর শ্রেণীভুক্ত হইবে।

6. a^2, b^2, c^2, সমান্তর শ্রেণীভুক্ত হইলে, প্রমাণ কর যে

$$\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}$$ সমান্তর শ্রেণীভুক্ত হইবে।

7. প্রমাণ কর যে কোন সমান্তর শ্রেণীর $2n$-সংখ্যক পদের শেষার্ধের সমষ্টি $3n$-সংখ্যক পদের সমষ্টির এক তৃতীয়াংশ।

8. কোন সমান্তর শ্রেণীভুক্ত তিনটি পদের সমষ্টি 30, এবং উহাদের গুণফল 840 ; পদ তিন্‌টি নির্ণয় কর।

9. যে সমান্তর শ্রেণীর n-তম পদ $2n-1$, তাহার n-পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

10. a ও c-র মধ্যবর্তী n-সংখ্যক সমান্তর মধ্যকের সমষ্টি নির্ণয় কর।

11. সমান্তর শ্রেণীভুক্ত চারিটি সংখ্যা নির্ণয় কর যাহাদের সমষ্টি 42 এবং প্রথম ও চতুর্থ টির গুণফল 54.

12. কোন সমান্তর শ্রেণীর n-পদের সমষ্টি m এবং m-পদের সমষ্টি n ; প্রমাণ কর উহার $(m+n)$-পদের সমষ্টি $-(m+n)$.

13. কোন লোক তাহার বন্ধুকে বিনা সুদে 1000 টাকা ধার দিলেন এই সর্তে যে তিনি প্রথম মাসে 64 টাকা দিবেন এবং পরবর্তী প্রত্যেক মাসে পূর্ব মাস অপেক্ষা 2 টাকা করিয়া কম দিবেন। কয় মাসে টাকাটা শোধ হইবে ?

14. একটি সোজা রাস্তার উপর 5 গজ অন্তর প্রস্তরখণ্ড স্থাপন করা হয়। প্রথম প্রস্তরখণ্ড হইতে 5 গজ দূরে স্থাপিত একটি ঝুড়িতে এক এক করিয়া, প্রস্তরগুলি আনিয়া রাখিতে হইবে। ঝুড়ির নিকট হইতে রওনা হইয়া এই কার্য্যে কোন লোককে মোট কত গজ হাঁটিতে হইবে ?

15. একজন কর্ম্মচারী মাসিক 60 টাকা বেতনে নিযুক্ত হন ; প্রতি বৎসর 5 টাকা হারে মাসিক বেতন বৃদ্ধি হইল। 10 বৎসরে তাঁহার মোট কত আয় হইল ?

16. সমান্তর শ্রেণীভুক্ত তিন অঙ্কের একটি সংখ্যা উহার অঙ্ক সমষ্টির 26 গুণ। সংখ্যাটির সহিত 396 যোগ করিলে, সংখ্যাটির অঙ্কগুলি পরস্পর স্থান পরিবর্ত্তন করে। সংখ্যাটি নির্ণয় কর।

গুণোত্তর শ্রেণী

(Geometrical Progression)

17. গুণোত্তর শ্রেণী। কোন শ্রেণীর যে কোন দুইটি ক্রমিক পদের অনুপাত ধ্রুবক হইলে সেই শ্রেণীকে গুণোত্তর শ্রেণী (Geometrical Series) বলে এবং যে কোন পদের সহিত উহার অব্যবহিত পূর্ব পদের অনুপাতকে **সাধারণ অনুপাত** (Common ratio) বলে। গুণোত্তর শ্রেণীর যে কোন পদকে উহার অব্যবহিত পূর্ব পদদ্বারা ভাগ করিলে যে ভাগফল হয়, উহাই ঐ শ্রেণীর সাধারণ অনুপাত। সুতরাং কোন গুণোত্তর শ্রেণীর প্রথম পদকে সাধারণ অনুপাত দ্বারা গুণ করিলে দ্বিতীয় পদ, দ্বিতীয় পদকে সাধারণ অনুপাত দ্বারা গুণ করিলে তৃতীয় পদ, তৃতীয় পদকে সাধারণ অনুপাত দ্বারা গুণ করিলে চতুর্থ পদ,…ইত্যাদি পাওয়া যায়।

$$1, 2, 4, 8, 16, \cdots; \quad -1, 3, -9, 27, \cdots; \quad \tfrac{2}{5}, \tfrac{1}{10}, \tfrac{1}{40}, \tfrac{1}{160}, \cdots;$$

এই তিনটি গুণোত্তর শ্রেণী। প্রথম শ্রেণীর সাধারণ অনুপাত 2, দ্বিতীয় শ্রেণীর সাধারণ অনুপাত -3, তৃতীয় শ্রেণীর সাধারণ অনুপাত $\frac{1}{4}$.

গুণোত্তর শ্রেণীর সংজ্ঞা হইতে সহজেই বুঝিতে পারা যায় যে

(*i*) কতিপয় রাশি গুণোত্তর শ্রেণীভুক্ত হইলে উহারা ক্রমিক সমানুপাতী হইবে।

(*ii*) কোন গুণোত্তর শ্রেণীর সমস্ত পদকে একই সংখ্যা দ্বারা গুণ বা ভাগ করিলে প্রাপ্ত ফলগুলিও একটি গুণোত্তর শ্রেণী উৎপন্ন করিবে।

18. গুণোত্তর শ্রেণীর সাধারণ আকার ও সাধারণ পদ নির্ণয়।

কোন গুণোত্তর শ্রেণীর প্রথম পদ a এবং সাধারণ অনুপাত r হইলে শ্রেণীটি হইবে, $a, ar; ar^2, ar^3, ar^4, ar^5 \cdots$

$$t_1 = a \quad t_2 = ar \quad t_3 = ar^2$$
$$t_4 = ar^3 \quad t_5 = ar^4 \cdots\cdots\cdots$$
$$\therefore \quad t_n = ar^{n-1}$$

$\therefore$ গুণোত্তর শ্রেণীর পদ সংখ্যা n হইলে, শেষ পদ $l = t_n = ar^{n-1}$

উদা. 1. 2, 4, 8,$\cdots$শ্রেণীর 10-তম ও n-তম পদ নির্ণয় কর।

এস্থলে প্রথম পদ $= 2$ এবং সাধারণ অনুপাত $= \frac{4}{2} = 2$

$\therefore$ 10-তম পদ $= 2.2^{10-1} = 2.2^9 = 2^{10} = 1024.$

n-তম পদ $= 2.2^{n-1} = 2^n.$

উদা. 2. $\frac{2}{3}, -1, \frac{3}{2}, -\frac{9}{4}, \cdots$শ্রেণীর 12-তম ও n-তম পদ নির্ণয় কর।

এস্থলে প্রথম পদ $= \frac{2}{3}$ এবং সাধারণ অনুপাত $= -\frac{3}{2}$

$\therefore$ 12-তম পদ $= \frac{2}{3}\left(-\frac{3}{2}\right)^{12-1} = \frac{2}{3}\left(-\frac{3}{2}\right)^{11} = \frac{2}{3}.\left(-\frac{3^{11}}{2^{11}}\right)$

$$= -\frac{3^{10}}{2^{10}} = -\frac{59049}{1024} = -57\frac{681}{1024}.$$

n-তম পদ $= \frac{2}{3}\left(-\frac{3}{2}\right)^{n-1} = \left(-1\right)^{n-1}\frac{2}{3}.\frac{3^{n-1}}{2^{n-1}} = \left(-1\right)^{n-1}.\frac{3^{n-2}}{2^{n-2}}$

n-তম পদ ধনাত্মক হইবে যদি n অযুগ্ম হয় এবং ঋণাত্মক হইবে যদি n যুগ্ম হয়।

উদা. 3. কোন গুণোত্তর শ্রেণীর চতুর্থ পদ 54 এবং অষ্টম পদ 4374 ; ত্রয়োদশ পদ নির্ণয় কর।

ধর প্রথম পদ a এবং সাধারণ অনুপাত r

তাহা হইলে, $54 = t_4 = ar^3 \qquad (i)$

এবং $4374 = t_8 = ar^7 \qquad (ii)$

$\therefore$ (ii) কে (i) দ্বারা ভাগ করিয়া, $r^4 = 81 = 3^4 \quad \therefore \quad r$

(i) এ, r-এর মান বসাইয়া, $a.3^3 = 54$

বা $27a = 54 \quad \therefore \quad a = 2$

$\therefore \quad t_{13} = ar^{12} = 2.3^{12} = 1062882.$

উদা. 4. কোন গুণোত্তর শ্রেণীর p-তম পদ c এবং q-তম পদ d ; প্রথম পদ ও সাধারণ অনুপাত নির্ণয় কর। (C. U. 1934)

ধর প্রথম পদ a এবং সাধারণ অনুপাত r,

তাহা হইলে $c = t_p = ar^{p-1}$ .. (i)

এবং $d = t_q = ar^{q-1}$ ...(ii)

$\therefore$ (i) কে (ii) দ্বারা ভাগ করিয়া, $\frac{c}{d} = r^{p-q}$ $\therefore$ $r = \left(\frac{c}{d}\right)^{\frac{1}{p-q}}$

(i) এ, r এর মান বসাইয়া, $c = ar^{p-1} = a.\left(\frac{c}{d}\right)^{\frac{p-1}{p-q}}$

$$a = c.\frac{d^{\frac{p-1}{p-q}}}{c^{\frac{p-1}{p-q}}} = c.c.^{\frac{1-p}{p-q}}d.^{\frac{p-1}{p-q}}$$

$$= c^{\frac{1-q}{p-p}}.\ d^{\frac{p-1}{p-q}}$$

$$= \left(c^{1-q}.d^{p-1}\right)^{\frac{1}{p-q}}$$

উদা. 5. কোন গুণোত্তর শ্রেণীর $(p+q)$-তম পদ m এবং $(p-q)$-তম পদ n ; p-তম ও q-তম পদ নির্ণয় কর। (C. U. 1238, 1942)

ধর প্রথম পদ a এবং সাধারণ অনুপাত r.

তাহা হইলে, $m = t_{p+q} = ar^{p+q-1}$ (i)

এবং $n = t_{p-q} = ar^{p-q-1}$ (ii)

(i) ও (ii) গুণ করিয়া, $mn = a^2r^{2p-2}$

$$\therefore \sqrt{mn} = \sqrt{a^2r^{2p-2}} = ar^{p-1} = t_p$$

(i)-কে (ii) দ্বারা ভাগ করিয়া, $\frac{m}{n} = r^{2q}$, $\therefore$ $r = \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{1}{2q}}$

$$\therefore \quad t_q = ar^{q-1} = ar^{p+q-1}.r^{-p}$$

$$= m.\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{-p}{2q}} = m\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{p}{2q}}.$$

উদা. 1. 8 এবং $5\frac{43}{49}$-এর গুণোত্তর মধ্যক নির্ণয় কর।

ধর নির্ণেয় গুণোত্তর মধ্যক x

$$x=\sqrt{8\times 5\tfrac{43}{49}}=\sqrt{8\times \tfrac{288}{49}}=\sqrt{\tfrac{8\times 8\times 6\times 6}{7\times 7}}=\tfrac{48}{7}=6\tfrac{6}{7}.$$

া. 2. 4 এবং $20\frac{1}{4}$-এর মধ্যে 3টি গুণোত্তর মধ্যক নির্ণয় কর।

ধর x_1, x_2 ও x_3 নির্ণেয় গুণোত্তর মধ্যক তিনটি।

তাহা হইলে 4, x_1, x_2, x_3, $\frac{81}{4}$ এই 5টি পদ গুণোত্তর শ্রেণীর অন্তর্গত।

ধর সাধারণ অনুপাত r ; তাহা হইলে $\frac{81}{4}=4r^4$.

বা $r^4=\frac{81}{16}=(\frac{3}{2})^4 \quad \therefore \; r=\pm\frac{3}{2}$.

$\therefore \; r=\frac{3}{2}$ ধরিলে, $x_1=4\times\frac{3}{2}=6$, $x_2=6\times\frac{3}{2}=9$, $x_3=9\times\frac{3}{2}=\frac{27}{2}=13\frac{1}{2}$.

$r=-\frac{3}{2}$ ধরিলে, $x_1=4\times-\frac{3}{2}=-6$, $x_2=-6\times-\frac{3}{2}=9$, $x_3=9\times-\frac{3}{2}$ $=-\frac{27}{2}=-13\frac{1}{2}$.

উদা. 3. যদি a এবং b-র মধ্যে n সংখ্যক গুণোত্তর মধ্যক স্থাপন করা যায়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে উক্ত গুণোত্তর মধ্যক সমূহের গুণফল $=(ab)^{\frac{n}{2}}$.

যেহেতু a এবং b-এর মধ্যে n-সংখ্যক গুণোত্তর মধ্যক আছে, সুতরাং a প্রথম পদ এবং b গুণোত্তর শ্রেণীর $(n+2)$-তম পদ।

ধর সাধারণ অনুপাত r. তাহা হইলে $b=ar^{n+1}$

$\therefore$ মধ্যক সমূহ হইল $ar, ar^2, ar^3, \cdots, ar^n$

$$\therefore \; ar\times ar^2\times ar^3\times ar^4\times\cdots\times ar^n$$

$$=a^n\times r.r^2.r^3\cdots\cdots r^n=a^n.r^{1+2+3+\cdots+n}$$

$$=a^n r^{\frac{n(n+1)}{2}}=a^{\frac{2n}{2}}r^{\frac{n(n+1)}{2}})$$

$$=(a^2r^{n+1})^{\frac{n}{2}}=(a.ar^{n+1})^{\frac{n}{2}}=(ab)^{\frac{n}{2}}.$$

উদা. 4. a ও b-এর গুণোত্তর মধ্যক এবং সমান্তর মধ্যকের অনুপাত $m:n$; প্রমাণ কর যে $a:b=n+\sqrt{n^2-m^2}:n-\sqrt{n^2-m^2}$.

a ও b-এর গুণোত্তর মধ্যক $\sqrt{ab}$ এবং সমান্তর মধ্যক $\frac{a+b}{2}$.

$\therefore$ সর্তানুসারে, $\frac{\sqrt{ab}}{\frac{1}{2}(a+b)}=\frac{m}{n}$ বা, $\frac{2\sqrt{ab}}{a+b}=\frac{m}{n}$ বা, $\frac{a+b}{2\sqrt{ab}}=\frac{n}{m}$.

যোগ ও ভাগ ক্রিয়ার সাহায্যে, $\frac{a+b+2\sqrt{ab}}{a+b-2\sqrt{ab}}=\frac{n+m}{n-m}$

বা, $\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}=\frac{n+m}{n-m}$.

$$\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{n+m}}{\sqrt{n-m}}$$

পুনরায় যোগ ও ভাগ ক্রিয়া দ্বারা, $\frac{2\sqrt{a}}{2\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{n+m}+\sqrt{n-m}}{\sqrt{n+m}-\sqrt{n-m}}$

বা, $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{n+m}+\sqrt{n-m}}{\sqrt{n+m}-\sqrt{n-m}}$;

বর্গ করিয়া, $\frac{a}{b}=\frac{n+m+n-m+2\sqrt{n^2-m^2}}{n+m+n-m-2\sqrt{n^2-m^2}}$

$$=\frac{2n+2\sqrt{n^2-m^2}}{2n-2\sqrt{n^2-m^2}}=\frac{n+\sqrt{n^2-m^2}}{n-\sqrt{n^2-m^2}}$$

প্রশ্নমালা 9

1. $\frac{2}{5}$ ও $\frac{8}{45}$ এর গুণোত্তর মধ্যকটি নির্ণয় কর।

2. $(x-y)^2$ এবং $(x+y)^2$ এর গুণোত্তর মধ্যক নির্ণয় কর।

3. 1 ও $\frac{81}{16}$ এর মধ্যে তিনটি গুণোত্তর মধ্যক স্থাপন কর।

4. 6 এবং 1458 এর মধ্যে চারিটি গুণোত্তর মধ্যক স্থাপন কর।

5. $-\frac{3}{4}$ এবং -48 এর মধ্যে পাঁচটি গুণোত্তর মধ্যক স্থাপন কর।

6. দুইটি ধনরাশির সমান্তর মধ্যক 15 এবং গুণোত্তর মধ্যক 9 ; রাশি দুইটি নির্ণয় কর।

7. যদি a ও b এর মধ্যে একটি সমান্তর মধ্যক হয় x এবং দুইটি গুণোত্তর মধ্যক হয় y ও z, প্রমাণ কর যে $y^3+z^3=2xyz$।

8. যদি a, b, c গুণোত্তর শ্রেণী গঠন করে এবং x, y যথাক্রমে a, b-র এবং b, c-র সমান্তর মধ্যক হয়, প্রমাণ কর যে,

$$\frac{2}{b}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y} \quad \text{এবং} \quad \frac{a}{x}+\frac{c}{y}=2.$$

23. গুণোত্তর শ্রেণীর সমষ্টি নির্ণয়।

কোন গুণোত্তর শ্রেণীর প্রথম পদ a এবং সাধারণ অনুপাত r হইলে, শ্রেণীটি হইবে $a, ar, ar^2, ar^3, \cdots\cdots$ এবং ইহার n-তম পদ হইবে ar^{n-1}.

ধর n-সংখ্যক পদের সমষ্টি S.

তাহা হইলে, $S = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-2} + ar^{n-1} \qquad \cdots(i)$

$\therefore \quad S.r = \quad ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-2} + ar^{n-1} + ar^n \qquad \cdots(ii)$

(i) হইতে (ii) বিয়োগ করিয়া, $S(1-r) = a - ar^n = a(1-r^n)$

$$\therefore \quad S = \frac{a(1-r^n)}{1-r} \qquad \cdots(i)$$

$$= \frac{a(r^n-1)}{r-1} \qquad \cdots(ii)$$

যখন সাধারণ অনুপাত $r<1$, সূত্র (i) এবং যখন $r>1$, সূত্র (ii) প্রয়োগ করা সুবিধাজনক।

সূত্র (ii) হইতে, $S = \dfrac{ar^n - a}{r-1} = \dfrac{r.ar^{n-1} - a}{r-1} = \dfrac{rl - a}{r-1} \qquad \cdots(iii)$

উদা. 1. $2 + 4 + 8 + \cdots\cdots$ শ্রেণীটির প্রথম 10টি পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

এস্থলে প্রথম পদ $= 2$, সাধারণ অনুপাত $= 2$ এবং $n = 10$

$$\therefore \quad S = \frac{2(2^{10}-1)}{2-1} = 2(2^{10}-1) = 2(1024-1) = 2046.$$

উদা. 2. $4 + 2 + \frac{1}{2} + \cdots$ শ্রেণীর প্রথম n-সংখ্যক পদ পর্যন্ত সমষ্টি নির্ণয় কর।

এস্থলে প্রথম পদ $= 4$, সাধারণ অনুপাত $= \frac{1}{2}$

$$\therefore \quad S = \frac{4\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)}{1 - \frac{1}{2}} = 8\left(1 - \frac{1}{2^n}\right).$$

উদা. 3. $3, -2, \frac{4}{3}, -\frac{8}{9}, \cdots\cdots$ শ্রেণীর প্রথম 7টি পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

এস্থলে প্রথম পদ $= 3$, সাধারণ অনুপাত $= -\frac{2}{3}$

$$\therefore \quad S = \frac{3\{1 - (-\frac{2}{3})^7\}}{1 - (-\frac{2}{3})} = \frac{3\{1 + (\frac{2}{3})^7\}}{1 + \frac{2}{3}} = \frac{9}{5}(1 + \tfrac{128}{2187}) = \tfrac{463}{243} = 1\tfrac{220}{243}.$$

প্রশ্নমালা 10

সমষ্টি নির্ণয় কর :

1. $1+2+4+8+\cdots\cdots$প্রথম 12টি পদ পর্যন্ত।

2. $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots\cdots$প্রথম n-সংখ্যক পদ পর্যন্ত।

3. $1+6+36+\cdots\cdots$প্রথম 10টি পদ পর্যন্ত।

4. $1-\frac{1}{4}+\frac{1}{16}-\frac{1}{64}+\cdots\cdots$প্রথম 6টি পদ পর্যন্ত।

5. $\frac{1}{\sqrt{3}}+1+\sqrt{3}+\cdots\cdots$প্রথম n-সংখ্যক পদ পর্যন্ত।

6. $(\sqrt{2}+1)+1+(\sqrt{2}-1)+\cdots\cdots$প্রথম n-সংখ্যক পদ পর্যন্ত।

7. কোন গুণোত্তর শ্রেণীর প্রথম দুই পদ 3 এবং $4\frac{1}{2}$; শ্রেণীটির প্রথম 8টি পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

8. কোন গুণোত্তর শ্রেণীর চতুর্থ পদ 20 এবং সপ্তম পদ 160; প্রমাণ কর যে, এই শ্রেণীর প্রথম 25 পদের সমষ্টি $\frac{5}{2}(2^{25}-1)$.

9. সমষ্টি নির্ণয় কর :

$$(a-x)+(a^2-x^2)+(a^3-x^3)+\cdots+(a^n-x^n)$$ (C. U. 1930)

24. গুণোত্তর শ্রেণী সম্বন্ধীয় বিবিধ প্রশ্ন।

উদা. 1. প্রমাণ কর যে গুণোত্তর শ্রেণীর প্রথম এবং শেষ পদ হইতে সমদূরবর্তী যে কোন দুইটি পদের গুণফল প্রথম ও শেষপদের গুণফলের সমান, অতএব ধ্রুবক।

ধর $a, ar, ar^2, \cdots$একটি গুণোত্তর শ্রেণী এবং ইহার n-তম অর্থাৎ শেষ পদ l. সুতরাং শেষ পদ হইতে দ্বিতীয় পদ $\frac{l}{r}$, তৃতীয় পদ $\frac{l}{r^2}$, চতুর্থ পদ $\frac{l}{r^3}$, p তম পদ $\frac{l}{r^{p-1}}$ ইত্যাদি।

প্রথম পদ হইতে p-তম পদ $=ar^{p-1}$.

শেষ পদ হইতে p-তম পদ $=\frac{l}{r^{p-1}}$

$\therefore$ এই দুইটি পদের গুণফল $=ar^{p-1}\times\frac{l}{r^{p-1}}=al$ (ধ্রুবক)

উদা. 2. $2+5+14+41+122+\cdots\cdots$শ্রেণীটির n-সংখ্যক পদের নির্ণয় কর।

একটু লক্ষ্য করিলে দেখা যাইবে প্রথম ও দ্বিতীয় পদের অন্তর 3, দ্বিতীয় ও তৃতীয় পদের অন্তর 9, তৃতীয় ও চতুর্থ পদের অন্তর 27, চতুর্থ ও পঞ্চম পদের অন্তর 81. এই অন্তরগুলি একটি গুণোত্তর শ্রেণী গঠন করে।

ধর, $S=2+5+14+41+122+\cdots+t_n$

এবং $S=\quad 2+5+14+41+\cdots+t_{n-1}+t_n$

বিয়োগ করিয়া, $0=2+[3+9+27+81+\cdots+(n-1)$ পদ পর্যন্ত $]-t_n$.

$$\therefore\quad t_n=2+\frac{3(3^{n-1}-1)}{3-1}=2+\frac{3^n-3}{2}=\frac{4+3^n-3}{2}$$

$$=\frac{3^n+1}{2}=\tfrac{1}{2}.3^n+\tfrac{1}{2}$$

n-এর পরিবর্তে যথাক্রমে 1, 2, 3 ...... n ধরিয়া,

$t_1=\frac{1}{2}.\ 3^1+\frac{1}{2}$
$t_2=\frac{1}{2}.\ 3^2+\frac{1}{2}$
$t_3=\frac{1}{2}.\ 3^3+\frac{1}{2}$
....
$t_n=\frac{1}{2}.\ 3^n+\frac{1}{2}$

$\therefore$ যোগ করিয়া, $S=\frac{1}{2}(3+3^2+3^3+\cdots\cdots n$-তম পদ পর্যন্ত $)+\frac{1}{2}.n$

$$=\tfrac{1}{2}.\frac{3(3^n-1)}{3-1}+\tfrac{1}{2}n=\tfrac{3}{4}(3^n-1)+\tfrac{1}{2}n.$$

. **3.** $5+55+555+\cdots$শ্রেণীটির n-সংখ্যক পদ পর্যন্ত সমষ্টি নির্ণয় কর।

ধর, $S=5+55+555+\cdots\cdots$ n-সংখ্যক পদ পর্যন্ত

$=5(1+11+111+\cdots\cdots$ n-সংখ্যক পদ পর্যন্ত)

$=\frac{5}{9}(9+99+999+\cdots\cdots$ n-সংখ্যক পদ পর্যন্ত)

$=\frac{5}{9}\{(10-1)+(100-1)+(1000-1)+\cdot$ n-সংখ্যক পদ পর্যন্ত $\}$

$=\frac{5}{9}\{(10+10^2+10^3+\cdots\cdots n$-সংখ্যক পদ পর্যন্ত $)-n\}$

$$=\tfrac{5}{9}\left\{\frac{10(10^n-1)}{10-1}-n\right\}=\tfrac{50}{81}(10^n-1)-\frac{5n}{9}.$$

উদা. 4. যদি a, b, c একটি গুণোত্তর শ্রেণী গঠন করে, প্রমাণ কর যে

$$a^2b^2c^2\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}\right) = a^3+b^3+c^3$$

যেহেতু a, b, c একটি গুণোত্তর শ্রেণী গঠন করে; সুতরাং a, b, c ক্রমিক সমানুপাতী হইবে।

$$\frac{a}{b} \quad \frac{b}{c} \quad \therefore \quad b^2 = ac,$$

$$\therefore \quad a^2b^2c^2\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}\right) = \frac{b^2c^2}{a}+\frac{c^2a^2}{b}+\frac{a^2b^2}{c}$$

$$= \frac{ac.c^2}{a}+\frac{(ca)^2}{b}+\frac{a^2.ac}{c} = c^3+\frac{(b^2)^2}{b}+a^3 = c^3+\frac{b^4}{b}+a^3 = a^3+b^3+c^3.$$

উদা. 5. তিনটি সংখ্যা গুণোত্তর শ্রেণী গঠন করে; সংখ্যা তিনটির গুণফল 1728 এবং যোগফল 52; সংখ্যা তিনটি নির্ণয় কর।

ধর, $\frac{a}{r}, a, ar$ নির্ণেয় সংখ্যা তিনটি।

সর্তানুসারে, $\frac{a}{r} \times a \times ar = 1728$ ......(*i*)

এবং, $\frac{a}{r} + a + ar = 52$ ......(*ii*)

(*i*) হইতে $a^3 = 1728, \quad \therefore \quad a = 12$

(*ii*) হইতে $\frac{12}{r} + 12 + 12r = 52$, বা, $\frac{12}{r} + 12r = 40$

বা, $\frac{3}{r} + 3r = 10$ বা, $3r^2 - 10r + 3 = 0$

বা, $(r-3)(3r-1) = 0$ বা, $r = 3$ বা, $\frac{1}{3}$

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যা তিনটি $\frac{12}{3}$, 12 এবং 12×3 অর্থাৎ 4, 12, 36

অথবা $\frac{12}{\frac{1}{3}}$, 12 এবং $12 \times \frac{1}{3}$ অর্থাৎ 36, 12, 4.

10. কোন গুণোত্তর শ্রেণীর প্রথম তিনটি পদের মধ্যটি 6 এবং প্রথম ও তৃতীয় পদের সমষ্টি 15. শ্রেণীটি নির্ণয় কর। (C. U. 1932)

11. যদি দুইটি সংখ্যার সমান্তর মধ্যক ও গুণোত্তর মধ্যকের অনুপাত 5 : 3 হয়, প্রমাণ কর যে সংখ্যা দুইটির অনুপাত 9 : 1 বা 1 : 9.

12. প্রমাণ কর যে কোন গুণোত্তর শ্রেণীর p-তম পদ হইতে আরম্ভ করিয়া n সংখ্যক পদের সমষ্টি q-তম পদ হইতে আরম্ভ করিয়া n সংখ্যক পদের সমষ্টির r^{p-q} গুণ। (M. U. 1884)

13. তিনটি সংখ্যা সমান্তর শ্রেণীভুক্ত এবং উহাদের সমষ্টি 18 ; যদি উহাদের সহিত যথাক্রমে 1, 2 ও 21 যোগ করা যায়, তাহা হইলে যোগফল তিনটি গুণোত্তর শ্রেণীভুক্ত হয়। সংখ্যা তিনটি নির্ণয় কর।

14. তিনটি সংখ্যা গুণোত্তর শ্রেণীভুক্ত এবং উহাদের গুণফল 27 ; যদি উহাদের সহিত যথাক্রমে 2, 5 ও 4 যোগ করা যায়, তাহা হইলে যোগফলগুলি সমান্তর শ্রেণীভুক্ত হইবে। সংখ্যা তিনটি নির্ণয় কর।

15. যদি কোন গুণোত্তর শ্রেণীর n পদ পর্যন্ত সমষ্টি s_1, $2n$ পদ পর্যন্ত সমষ্টি s_2 এবং $3n$-পর্যন্ত সমষ্টি s_3 দ্বারা সূচিত হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর

$$s_1(s_3 - s_2) = (s_2 - s_1)^2.$$ (B. U. 1882)

16. যদি কোন গুণোত্তর শ্রেণীর n-সংখ্যক পদের ধারাবাহিক গুণফল P, উহাদের সমষ্টি S এবং উহাদের বিপরীত (reciprocal) সমূহের সমষ্টি R হয়, প্রমাণ কর

$$P^2 = \left(\frac{S}{R}\right)^n.$$ (C. U. 1883)

17. দুইটি অসমান ধনাত্মক বাস্তব রাশির সমান্তর মধ্যক A এবং গুণোত্তর মধ্যক G. প্রমাণ কর যে $A > G > \frac{G^2}{A}$. (G. U. 1950)

বিপরীত প্রগতি

Harmonic Progression

25. তিনটি রাশির প্রথম ও তৃতীয়ের অনুপাত, প্রথম হইতে দ্বিতীয়ের বিয়োগফল ও দ্বিতীয় হইতে তৃতীয়ের বিয়োগফলের অনুপাতের সমান হইলে রাশি তিনটি **Harmonic Progression**-এ (বিপরীত প্রগতিতে) আছে বলা হয়।

a, b, c বিপরীত প্রগতিতে আছে বলা হইবে যদি $\frac{a}{c}=\frac{a-b}{b-c}$ হয়।

• যদি কোন শ্রেণীর যে কোন ক্রমিক তিন তিনটি পদ বিপরীত প্রগতিতে থাকে তবে সমস্ত শ্রেণীটিই বিপরীত প্রগতিতে থাকে।

26. বিপরীত প্রগতি ও সমান্তর শ্রেণীর সম্বন্ধ।

বিপরীত প্রগতির পদগুলির বিপরীত বা অন্যোন্যক (reciprocal) সমান্তর শ্রেণী গঠন করে।

a, b, c বিপরীত প্রগতিতে থাকিলে $\frac{a}{\;}=\frac{a-b}{\;}$

বা, $c(a-b)=a(b-c)$

বা, $ac-bc=ab-ac$

উভয় পক্ষকে abc দ্বারা ভাগ করিয়া,

$$\frac{1}{b}-\frac{1}{a}=\frac{1}{c}-\frac{1}{b}.$$

$\therefore\ \frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ সমান্তর শ্রেণীতে আছে।

বিপরীত প্রগতি সম্বন্ধীয় অঙ্ক কষিতে হইলে, বিপরীত প্রগতির পদ সমূহের অন্যোন্যক বা বিপরীত (reciprocal) লইয়া সমান্তর শ্রেণী গঠন করিতে হয় এবং অতঃপর সমান্তর শ্রেণীর অঙ্ক কষিবার প্রণালী অবলম্বন করিতে হয়।

1. 1. $2, \frac{6}{5}, \frac{6}{7}, \cdots\cdots$ বিপরীত শ্রেণীর দশম পদ নির্ণয় কর।

যেহেতু $2, \frac{6}{5}, \frac{6}{7}, \cdots\cdots$ বিপরীত প্রগতিতে আছে,

সুতরাং $\frac{1}{2}, \frac{5}{6}, \frac{7}{6}, \cdots\cdots$ সমান্তর শ্রেণীতে আছে।

এই সমান্তর শ্রেণীর প্রথম পদ $\frac{1}{2}$ এবং সাধারণ অন্তর $\frac{5}{6} - \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$

তাহা হইলে সমান্তর শ্রেণীর $t_{10} = \frac{1}{2} + 9 \times \frac{1}{3} = \frac{7}{2}$

$\therefore$ বিপরীত শ্রেণীর দশম পদ $= \frac{2}{7}$.

উদা. 2. কোন বিপরীত প্রগতির চতুর্থ পদ $\frac{1}{14}$ এবং দশম পদ $\frac{1}{38}$; শ্রেণীটি নির্ণয় কর।

চতুর্থ পদ $\frac{1}{14}$ এর বিপরীত 14 এবং দশম পদ $\frac{1}{38}$ এর বিপরীত 38. সুতরাং কোন সমান্তর শ্রেণীর চতুর্থ পদ 14 এবং দশম পদ 38. সমান্তর শ্রেণীটির প্রথম পদ a এবং সাধারণ অন্তর b ধরা হইল। তাহা হইলে,

$$a + 3b = 14 \qquad \cdots\cdots(i)$$

$$a + 9b = 38 \qquad \cdots\cdots(ii)$$

(i) হইতে (ii) বিয়োগ করিয়া, $-6b = -24 \quad \therefore \quad b = 4$

সমীকরণ (i) এ $b = 4$ ধরিলে, $a = 14 - 3b = 14 - 3.4 = 2$

$\therefore$ সমান্তর শ্রেণীটি হইবে 2, 6, 10, 14

$\therefore$ বিপরীত প্রগতির শ্রেণী হইবে $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{10}, \frac{1}{14}$.

উদা. 3. a ও b-এর বিপরীত মধ্যক (Harmonic mean) নির্ণয় কর।

ধর নির্ণেয় বিপরীত মধ্যক H.

তাহা হইলে $\frac{1}{a}, \frac{1}{H}, \frac{1}{b}$ সমান্তর শ্রেণীভুক্ত

$$\frac{1}{H} - \frac{1}{a} = \frac{1}{b} - \frac{1}{H}.$$

$$\text{বা,} \quad \frac{2}{H} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b}{ab}$$

$$2ab = H(a+b)$$

$$H = \frac{2ab}{a+b}.$$

উদা. 4. 2 এবং 4 এর মধ্যে তিনটি বিপরীত মধ্যক (H. M.) নির্ণয় কর।

প্রথমতঃ $\frac{1}{2}$ এবং $\frac{1}{4}$ এর মধ্যে তিনটি সমান্তর মধ্যক নির্ণয় করিতে হইবে।

ধর সমান্তর শ্রেণীর সাধারণ অন্তর b.

তাহা হইলে উক্ত শ্রেণীর $t_5 = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} + 4b.$

বা, $4b = -\frac{1}{4} \quad \therefore \quad b = -\frac{1}{16}.$

$\therefore$ সমান্তর মধ্যক তিনটি হইবে $\frac{1}{2} - \frac{1}{16}$, $\frac{1}{2} - \frac{1}{16} \times 2$, $\frac{1}{2} - \frac{1}{16} \times 3$ বা $\frac{7}{16}, \frac{3}{8}, \frac{5}{16}$.

$\therefore$ নির্ণেয় বিপরীত মধ্যক তিনটি হইবে $\frac{16}{7}, \frac{8}{3}, \frac{16}{5}$ বা $2\frac{2}{7}, 2\frac{2}{3}, 3\frac{1}{5}$.

উদা. 5. যদি x, y, z যথাক্রমে a ও b-এর সমান্তর মধ্যক (A. M.), গুণোত্তর মধ্যক (G. M.) এবং বিপরীত মধ্যক (H. M.) হয়, তবে প্রমাণ কর যে x ও z-এর গুণোত্তর মধ্যক y.

a ও b-এর সমান্তর মধ্যক $\frac{a+b}{2}$ অর্থাৎ $x = \frac{a+b}{2}$

a ও b-এর গুণোত্তর মধ্যক $\sqrt{ab}$ অর্থাৎ $y = \sqrt{ab}$.

এবং a ও b-এর বিপরীত মধ্যক $\frac{2ab}{a+b}$ অর্থাৎ $z = \frac{2ab}{a+b}$.

$$\therefore \quad xz = \frac{a+b}{2} \cdot \frac{2ab}{a+b} = ab = (\sqrt{ab})^2 = y^2.$$

$\therefore$ x ও z-এর গুণোত্তর মধ্যক y.

চতুর্থ অধ্যায়

ভেদ (Variation)

1. কোন বৈজিক রাশিমালায় যে রাশি পরিবর্তনশীল অর্থাৎ যে রাশি বিভিন্ন মান গ্রহণ করিতে পারে তাহাকে **চলরাশি** বা **চল** (variable) বলে এবং যে রাশি পরিবর্তনশীল নহে অর্থাৎ যে রাশির মান সর্বদা একই থাকে তাহাকে **ধ্রুবক** (constant) বলে।

2. দুইটি চলরাশির একটি যদি অপরটির উপর এরূপভাবে নির্ভর করে অর্থাৎ উহাদের মধ্যে যদি এরূপ সম্পর্ক বিদ্যমান থাকে যে একটির মানের কোন পরিবর্তন হইলে অপরটির মানও একই অনুপাতে পরিবর্তিত হয়, তাহা হইলে একটি রাশি অপর রাশির সহিত 'সরল ভেদে আছে' (varies directly) বলা হয়।

সাধারণতঃ সরলভেদে আছে (varies directly) না বলিয়া 'ভেদে আছে' (varies) বলা হইয়া থাকে।

উদাহরণ। একখানি ট্রেন ঘণ্টায় 30 মাইল বেগে চলিতেছে। তাহা হইলে ইহা 2 ঘণ্টায় যাইবে 60 মাইল। 3 ঘণ্টায় যাইবে 90 মাইল। $\frac{1}{2}$ ঘণ্টায় যাইবে 15 মাইল, $\frac{1}{3}$ ঘণ্টায় যাইবে 10 মাইল ইত্যাদি। অর্থাৎ সময়কে দ্বিগুণ করিলে দূরত্বও দ্বিগুণ হইবে, সময়কে 3 গুণ করিলে দূরত্বও 3 গুণ হইবে, সময় $\frac{1}{2}$ হইলে দূরত্বও $\frac{1}{2}$ হইবে, সময় $\frac{1}{3}$ হইলে দূরত্বও $\frac{1}{3}$ হইবে, ইত্যাদি। এস্থলে বলা চলে বেগ সমান থাকিলে দূরত্ব সময়ের সহিত ভেদে আছে (distance varies as the time)। আবার মনে কর ট্রেন ঘণ্টায় 30 মাইল চলে, সুতরাং ইহা 60 মাইল যাইবে 2 ঘণ্টায়, 90 মাইল যাইবে 3 ঘণ্টায়, 15 মাইল যাইবে $\frac{1}{2}$ ঘণ্টায়, 10 মাইল যাইবে $\frac{1}{3}$ ঘণ্টায় অর্থাৎ দূরত্ব দ্বিগুণ হইলে সময়ও দ্বিগুণ লাগিবে। দূরত্ব 3 গুণ হইলে সময়ও 3 গুণ লাগিবে, দূরত্ব $\frac{1}{2}$ হইলে, সময়ও $\frac{1}{2}$ লাগিবে, দূরত্ব $\frac{1}{3}$ হইলে, সময়ও $\frac{1}{3}$ লাগিবে, ইত্যাদি। সুতরাং বলা চলে বেগ সমান থাকিলে সময় দূরত্বের সহিত ভেদে আছে (time varies as the distance).

x, y দুইটি রাশির মধ্যে x যদি y-এর উপর এরূপভাবে নির্ভর করে যে x-এর মান x_1, x_2, x_3 হইলে y-এর অনুরূপ মান যথাক্রমে y_1, y_2, y_3 হয়, এবং যদি $\frac{x}{x_1}=\frac{y}{y_1}$; $\frac{x}{x_2}=\frac{y}{y_2}$; $\frac{x}{x_3}=\frac{y}{y_3}$;... ইত্যাদি হয়, তাহা হইলে 'x এবং y সরলভেদে আছে' বলা হয়।

'$\propto$' প্রতীক দ্বারা ভেদ সূচিত হয়। 'x এবং y সরলভেদে আছে', ইহাকে '$x \propto y$' এইরূপে প্রকাশ করা হয়।

3. If $A \propto B$, then $A=mB$, where m is constant.

(যদি $A \propto B$, তাহা হইলে $A=mB$, যেখানে m একটি ধ্রুবক।)

মনে কর A-র বিভিন্ন মান A_1, A_2, A_3...... হইলে, B-র অনুরূপ বিভিন্ন মান হয় B_1, B_2, B_3......। এখন যেহেতু A, B-এর ভেদে আছে,

$$\text{সুতরাং } \frac{A}{A_1}=\frac{B}{B_1};\ \frac{A}{A_2}=\frac{B}{B_2};\ \frac{A}{A_3}=\frac{B}{B_3};\ \ldots\ldots$$

$$\therefore\ \frac{A_1}{B_1}=\frac{A}{B};\ \frac{A_2}{B_2}=\frac{A}{B};\ \frac{A_3}{B_3}=\frac{A}{B};\ \ldots\ldots$$

$$\text{বা, } \frac{A_1}{B_1}=\frac{A_2}{B_2}=\frac{A_3}{B_3}=\cdots=\frac{A}{B}.$$

অর্থাৎ A-এর যে কোন মান ও B-র অনুরূপ মানের অনুপাত সর্বদাই সমান, সুতরাং ধ্রুবক।

$$\therefore\ \frac{A}{B}=m, \text{ যেখানে } m \text{ একটি ধ্রুবক}$$

$$\therefore\ A=mB.$$

4. যদি কোন রাশি A অপর রাশি B-র অন্যোন্যক (reciprocal) বা ব্যস্ত-এর সহিত সরলভেদে থাকে তাহা হইলে A, B-এর সহিত 'ব্যস্ত ভেদে আছে'। (A varies inversely as B) বলা হয়।

A, B-র সহিত ব্যস্ত ভেদে থাকিলে, $A \propto \frac{1}{B}$ $\therefore A=\frac{m}{B}$ যেখানে m একটি ধ্রুবক।

উদাহরণ। (1) যে কাজ 4 জন লোক করিতে পারে 6 দিনে, উহা 1 জনে করিতে পারে 24 দিনে। উহা 2 জনে করিবে 12 দিনে, 8 জনে করিবে 3 দিনে। এস্থলে লোকসংখ্যা বাড়িলে দিন সংখ্যা কমে এবং লোকসংখ্যা কমিলে দিন সংখ্যা বাড়ে।

(2) ঘণ্টায় 4 মাইল বেগে যে দূরত্ব যাইতে সময় লাগে 6 ঘণ্টা, ঘণ্টায় 2 মাইল বেগে যাইলে সময় লাগিবে 12 ঘণ্টা; ঘণ্টায় 8 মাইল বেগে সময় লাগে 3 ঘণ্টা, ইত্যাদি। এস্থলে বেগ কমাইলে সময় বেশী দরকার হয়, বেগ বাড়াইলে সময় কম দরকার হয়।

5. যদি একটি রাশি অপর কয়েকটি রাশির গুণফলের সহিত সরল ভেদে থাকে তবে প্রথম রাশি অপর রাশি কয়েকটির 'যৌগিক ভেদে আছে' (varies jointly) বলা হয়।

যদি A, B এবং C-এর সহিত যৌগিক ভেদে থাকে তাহা হইলে

$A \propto BC \quad \therefore \quad A = mBC$ যেখানে m একটি ধ্রুবক।

উদাহরণ। দৈনিক মজুরী নির্দিষ্ট থাকিলে মোট মজুরী মজুরের সংখ্যা ও দিনের সংখ্যার যৌগিক ভেদে থাকে।

ত্রিভুজ বা আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল ভূমি ও উন্নতির সহিত যৌগিক ভেদে আছে।

কোনও মূলধনের সুদ মূলধন, সময় এবং সুদের হারের যৌগিক ভেদে আছে।

6. একটি রাশি A, দ্বিতীয় একটি রাশি B-র সহিত সরল ভেদে এবং তৃতীয় একটি রাশি C-এর সহিত ব্যস্তভেদে থাকে, যখন A, $\frac{B}{C}$-র সহিত সরল ভেদে থাকে।

A, B-র সহিত সরল ভেদে এবং C-র সহিত ব্যস্তভেদে থাকিলে,

$$A \propto \frac{B}{C}$$

$$A = m\frac{B}{C}.$$ যেখানে m একটি ধ্রুবক।

If A varies as B when C is constant, and A varies as C when B is constant, then A will vary as BC when both B and C vary.

(যদি A, B-র সহিত সরল ভেদে থাকে যখন C ধ্রুবক এবং A, C-র সহিত সরল ভেদে থাকে যখন B ধ্রুবক, তাহা হইলে A, BC-র সহিত সরল ভেদে থাকিবে, যখন B এবং C উভয়ই চল হয়।)

এ স্থলে A-র ভেদ বা পরিবর্তন নির্ভর করে আংশিকভাবে B-র উপর এবং আংশিকভাবে C-র উপর।

মনে কর B ও C-র প্রত্যেকের পরিবর্তন পৃথক্‌ভাবে ঘটিয়া A-র উপর প্রত্যেকের ফল স্বাধীনভাবে উৎপন্ন করে এবং সম্পূর্ণ পরিবর্তনেব পর A, B এবং C-র অনুরূপ মান হয় যথাক্রমে A_1, B_1 এবং C_1।

যখন C ধ্রুবক অর্থাৎ C-র কোন পরিবর্তন হয় নাই, তখন B-র মান পরিবর্তিত হইয়া B_1 হইলে A-র মান কিন্তু পরিবর্তিত হইয়া A_1 হইবে না, কারণ তখন মাত্র B-র মান পরিবর্তিত হইয়া B_1 হইয়াছে, C-র কোন পরিবর্তন হয় নাই। এই অবস্থায় A-র পরিবর্তিত মান হইল মনে কর, a। তাহা হইলে সংজ্ঞা অনুসারে,

$$\frac{A}{a}=\frac{B}{B_1}, \quad \ldots\ldots(i)$$

আবার যখন B-র মান B_1-ই রহিল অর্থাৎ উহার আর কোন পরিবর্তন হইল না, তখন মনে কর C-র মান পরিবর্তিত হইযা হইল C_1। এই অবস্থায A-র মান a হইতে পরিবর্তিত হইয়া হইল A_1। তাহা হইলে সংজ্ঞানুসারে,

$$\frac{a}{A_1}=\frac{C}{C_1}, \quad \ldots\ldots(ii)$$

এখন, (i) এবং (ii) গুণ করিয়া,

$$\frac{A}{a}\times\frac{a}{A_1}=\frac{B}{B_1}\times\frac{C}{C_1}$$

বা, $\dfrac{A}{A_1}=\dfrac{BC}{B_1C_1}$ বা, $A=\dfrac{A_1}{B_1C_1}.\ BC.$

$\therefore\ A \propto BC.$

8. ভেদ সম্বন্ধীয় কয়েকটি সিদ্ধান্ত।

1. If $A \propto B$ and $B \propto C$, then $A \propto C$.

$A \propto B$, $\therefore$ $A = mB$, $B \propto C$ $\therefore$ $B = nC$ (যেখানে m এবং n ধ্রুবক)

$\therefore$ $A = mB = mnC$ $\therefore$ $A \propto C$.

2. If $A \propto B$ and $B \propto \frac{1}{C}$, then $A \propto \frac{1}{C}$.

$A \propto B$, $\therefore$ $A = mB$, $B \propto \frac{1}{C}$, $\therefore$ $B = \frac{n}{C}$

(যেখানে m এবং n ধ্রুবক)

$\therefore$ $A = mB = m.\frac{n}{C} = \frac{mn}{C}$, $\therefore$ $A \propto \frac{1}{C}$.

3. If $A \propto C$ and $B \propto C$, then

(*i*) $A \pm B \propto C$ (*ii*) $\sqrt{AB} \propto C$ (*iii*) $AB \propto C^2$

$A \propto C$ $\therefore$ $A = mC$; $B \propto C$ $\therefore$ $B = nC$

$\therefore$ (*i*) $A \pm B = mC \pm nC = (m \pm n)C$, $\therefore$ $A \pm B \propto C$.

(*ii*) $\sqrt{AB} = \sqrt{mC.nC} = \sqrt{(mn)}.C$, $\therefore$ $\sqrt{AB} \propto C$

(*iii*) $AB = mnC^2$ $\therefore$ $AB \propto C^2$

4. If $A \propto BC$, then (*i*) $B \propto \frac{A}{C}$ and (*ii*) $C \propto \frac{A}{B}$

$A \propto BC$ $\therefore$ $A = mBC$, যেখানে m একটি ধ্রুবক।

$\therefore$ (*i*) $B = \frac{A}{mC} = \frac{1}{m} \cdot \frac{A}{C}$, $\therefore$ $B \propto \frac{A}{C}$

এবং (*ii*) $C = \frac{A}{mE} = \frac{1}{m} \cdot \frac{A}{B}$, $\therefore$ $C \propto \frac{A}{B}$.

5. If $A \propto B$ and $C \propto D$, then $AC \propto BD$

$A \propto B$ $\therefore$ $A = mB$, যেখানে m একটি ধ্রুবক,

$C \propto D$ $\therefore$ $C = nD$, যেখানে n একটি ধ্রুবক,

$\therefore$ $AC = mB \cdot nD = mn\,BD$ $\therefore$ $AC \propto BD$.

6. If $A \propto B$, then $A^n \propto B^n$.

$A \propto B \quad \therefore \quad A = mB. \quad \therefore \quad A^n = m^n B^n \quad \therefore \quad A^n \propto B^n.$

7. $A \propto B$ and P any other quantity, then

(*i*) $AP \propto BP$. and (*ii*) $\frac{A}{P} \propto \frac{B}{P}$

(*i*) $A \propto B \quad \therefore \quad A = mB$ (m ধ্রুবক)

$\therefore \quad AP = mBP \quad \therefore \quad AP \propto BP$ (m ধ্রুবক বলিয়া)

(*ii*) $A \propto B \quad \therefore \quad A = mB$

$\therefore \quad \frac{A}{P} = m.\frac{B}{P} \quad \therefore \quad \frac{A}{P} \propto \frac{B}{P}.$

উদা 1. If $x \propto y$, and $y = 8$ when $x = 15$, find x when $y = 40$

$x \propto y \quad \therefore \quad x = my$, যেখানে m একটি ধ্রুবক।

এখন $y = 8$ এবং $x = 15$ ধরিলে,

$15 = 8m$ or $m = \frac{15}{8}$

আবার $x = my$ or $x = \frac{15}{8} . 40 = 75.$

উদা. 2. If x varies directly as y and inversely as z and $x = a$, when $y = b$ and $z = c$, find the value of x, when $y = b^2$ and $z = c^2$.

$$x \propto \frac{y}{z} \quad \therefore \quad x = m\cdot\frac{y}{z} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(i)$$

(*i*)-এ $x = a$, $y = b$ এবং $z = c$ ধরিলে, $a = m\cdot\frac{b}{c} \quad \therefore \quad m = \frac{ac}{b}$

আবার (*i*)-এ, $m = \frac{ac}{b}$, $y = b^2$ এবং $z = c^2$ ধরিলে,

$$\frac{ac}{b} \cdot \frac{b^2}{c^2} = \frac{ab}{c}.$$

উদা. 3. If $a+b \propto a-b$, prove that $a^2+b^2 \propto ab$.

(C. U. Int. 1336)

$$a+b \propto a-b \quad \therefore \quad a+b=(a-b)k$$

বা, $\dfrac{a+b}{a-b}=k$

বা, $\dfrac{(a+b)^2}{(a-b)^2}=k^2$

By comp. & Div., $\dfrac{(a+b)^2+(a-b)^2}{(a+b)^2-(a-b)^2}=\dfrac{k^2+1}{k^2-1}$

বা, $\dfrac{2(a^2+b^2)}{4ab}=\dfrac{k^2+1}{k^2-1}$

বা, $a^2+b^2=2\left(\dfrac{k^2+1}{k^2-1}\right).ab$

$\therefore$ $a^2+b^2 \propto ab$, কারণ $\dfrac{2(k^2+1)}{k^2-1}$ একটি ধ্রুবক।

উদা. 4. If A varies as B and A varies as C, prove that A varies as B + C.

$\mathrm{A} \propto \mathrm{B} \quad \therefore \quad \mathrm{A}=m\mathrm{B}$ (m ধ্রুবক) $\quad \therefore \quad \mathrm{B}=\dfrac{\mathrm{A}}{m}$

$\mathrm{A} \propto \mathrm{C} \quad \therefore \quad \mathrm{A}=n\mathrm{C}$ (n ধ্রুবক) $\quad \therefore \quad \mathrm{C}=\dfrac{\mathrm{A}}{n}$

$$\therefore \quad \mathrm{B}+\mathrm{C}=\mathrm{A}\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)=\mathrm{A}\left(\frac{m+n}{mn}\right)$$

$$\therefore \quad \mathrm{A}=\frac{mn}{m+n}(\mathrm{B}+\mathrm{C})$$

$\therefore$ $\mathrm{A} \propto \mathrm{B}+\mathrm{C}$ (কারণ $\dfrac{mn}{m+n}$ একটি ধ্রুবক)

উদা. 5. If x, y, z be variables such that $x+y+z$ is constant and if $(x+z-y)(x-z+y) \propto yz$, prove that $y+z-x \propto yz$.

(C. U. Int. 1956)

$x+y+z=$ ধ্রুবক $=a$ (ধর)

যেহেতু $(x+z-y)(x-z+y) \propto yz$,

$\therefore$ $\{x-(y-z)\}\{x+(y-z)\}=k.yz$, যখন k একটি ধ্রুবক

বা, $x^2-(y-z)^2=k.yz$

বা, $x^2-\{(y+z)^2-4yz\}=k.yz$

বা, $x^2-(y+z)^2=-4yz+k.yz$

বা, $(x+y+z)(x-y-z)=-yz(4-k)$

বা, $-(x+y+z)(y+z-x)=-yz(4-k)$

বা, $a(y+z-x)=yz(4-k)$ $[\because x+y+z=a]$

বা, $y+z-x=\frac{4-k}{a}yz$

$\therefore$ $y+z-x \propto yz$, কারণ $\frac{4-k}{a}$ একটি ধ্রুবক।

উদা. 6. Apply the principles of variation to find how long 25 men will take to plough 30 acres, if 5 men take 9 days to plough 10 acres of land.

(C. U. Int. 1934)

মনে কর, লোক সংখ্যা m, দিন সংখ্যা d এবং একরের সংখ্যা a.

যখন একরের সংখ্যা ধ্রুবক থাকে, তখন দিনের সংখ্যা বাড়াইলে লোকের সংখ্যা কম হয়।

$\therefore$ m, d-এর সহিত ব্যস্ত ভেদে থাকে যখন a ধ্রুবক।

আবার যখন দিনের সংখ্যা ধ্রুবক থাকে, তখন একরের সংখ্যা বাড়াইলে লোকের সংখ্যা বাড়ে,

$\therefore$ m, a-র সহিত সরল ভেদে থাকে যখন d ধ্রুবক।

আবার, $D = 44\cdot5$ এবং $K = \frac{3}{12\cdot04}$ ধরিলে,

$$T = \sqrt{44\cdot5} \times \frac{3}{12\cdot04} = \frac{6\cdot7 \times 3}{12\cdot04} = \frac{20\cdot1}{12\cdot04} = \frac{2010}{1204} = 1\cdot7$$

$\therefore$ নির্ণেয় সময় $= 1\cdot7$ সেকেণ্ড।

উদা. 10. If $x + y \propto z$ when y is constant and if $x + z \propto y$ when z is constant, show that when both y and z vary, then $x + y + z \propto yz$. [C. U. 1941]

$\because$ $x + y \propto z$, যখন y ধ্রুবক, $\therefore$ $x + y = mz$.

$\therefore$ $x + y + z = mz + z = (1 + m)z$.

$\therefore$ $x + y + z \propto z$, যখন y ধ্রুবক ......(i)

আবার, $x + z \propto y$, যখন z ধ্রুবক, $\therefore$ $x + z = ny$

$\therefore$ $x + y + z = ny + y = (1 + n)y$

$\therefore$ $x + y + z \propto y$, যখন z ধ্রুবক ......(ii)

$\therefore$ (i) এবং (ii) হইতে, $x + y + z \propto yz$, যখন y এবং z উভয়ই পরিবর্তনশীল।

উদা. 11. Two globes of gold that have their radii equal to r and r' are melted and formed into a single globe. Find its radius. (The volume of a globe varies as the cube of the radius.) [C. U. 1931]

মনে কর r ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট গোলকের ঘনফল v এবং r' ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট গোলকের ঘনফল v_1.

যেহেতু $v \propto r^3$, $v = mr^3$ (যখন m ভেদের ধ্রুবক)

আবার, যেহেতু $v_1 \propto r'^3$, $\therefore$ $v_1 = mr'^3$ (যখন m ভেদের ধ্রুবক)

$\therefore$ $v + v_1 = m\,(r^3 + r'^3)$

গোলক দুইটির সংমিশ্রণে যে গোলক উৎপন্ন হইল উহার ঘনফল $= v + v_1$. ধর উহার ব্যাসার্ধ R.

তাহা হইলে $v + v_1 = mR^3$. (যখন m ভেদের ধ্রুবক)

$\therefore$ $mR^3 = m\,(r^3 + r'^3)$

or, $R^3 = r^3 + r'^3$ $\therefore$ $R = \sqrt[3]{r^3 + r'^3}$.

উদা. 12. The wages of 100 men for 6 months amount to Rs 43200- How many men can be employed for 7 months for Rs. 18144 ?

লোক সংখ্যা M, বেতন W, মাসের সংখ্যা T ধরিলে,

$W \propto M$, যখন T ধ্রুবক,

এবং $W \propto T$, যখন M ধ্রুবক,

$\therefore \quad W \propto MT \quad \therefore \quad W = MT.K$ (K ধ্রুবক)

এখন $W = 43200$, $M = 100$ এবং $T = 6$ ধরিলে,

$43200 = 100 \times 6 \times K \qquad K = \frac{43200}{600} = 72$

আবার, $W = 18144$, $T = 7$ এবং $K = 72$ ধরিলে,

$18144 = M.7.72 \quad . \quad M = \frac{18144}{7 \times 72} = 36.$

নির্ণেয় লোকসংখ্যা $= 36.$

উদা. 13. The expenses of a hotel are partly constant and partly vary as the number of inmates. The expenses were Rs. 2000 when the inmates were 120 and Rs. 1700 when the inmates were 100. Find the number of inmates when the expenses were Rs. 1880. [Bombay 1927]

ধর হোটেলের মোট ব্যয় E টাকা, লোকসংখ্যা N এবং নির্দিষ্ট খরচ C টাকা (ধ্রুবক)।

তাহা হইলে $E = K.N + C$ (K এবং C ধ্রুবক)

এখন $E = 2000$, এবং $N = 120$ হইলে,

$2000 = K.120 + C \cdots\cdots (i)$

আবার $E = 1700$ এবং $N = 100$ হইলে,

$1700 = K.100 + C \cdots\cdots (ii)$

(i) এবং (ii) সমাধান করিয়া $K = 15$ এবং $C = 200$

$\therefore \quad E = 1880$, হইলে $1880 = 15N + 200$

বা, $15N = 1680 \quad \therefore \quad N = 112.$

$\therefore$ নির্ণেয় লোকসংখ্যা $= 112.$

প্রশ্নমালা 12

1. If $x \propto y$, and $x=6$, when $y=4$, find y, when $x=10$.

2. If $x \propto y$, and $y=10$, when $x=8$, find x, when $y=25$.

3. If $y \propto \frac{1}{x}$ and $y=4$ when $x=9$, find y, when $x=12$.

4. If A varies jointly as B and C and $A=18$, when $B=10$ and $C=14$; find B, when $A=108$, and $C=20$.

5. A varies directly as B and inversely as C; and $A=20$, when $B=30$ and $C=12$; find A, when $B=16$ and $C=4$.

6. If $A \propto \frac{1}{B}$ and $B \propto \frac{1}{C}$, prove that $C \propto A$.

7. If A varies as B and C jointly and if $A=2$, when $B=\frac{3}{5}$, $C=\frac{10}{27}$; find C, when $A=54$ and $B=3$. [C. U. 1920]

8. If A^2+B^2 varies as A^2-B^2, show that A varies as B.

9. If x varies directly as the square of y and inversely as the cube root of z, and if $x=2$, when $y=4$ and $z=8$; find the value of y, when $x=3$ and $y=27$. [C. U. Int. 1917]

10. If x, y, z be variable quantities such that $y+z-x$ is constant and if $(x+y-z)(x-y+z) \propto yz$, prove that $x+y+z \propto yz$. [P. U. 1940]

11. If $2x+3y \propto x+5y$, and when $x=3$, $y=5$; find the equation between x and y.

12. If $4x-3y$ varies directly as $3x-2y$, and when $x=4$, $y=5$; find the equation between x and y.

13. Given that y is inversely proportional to $ax+2$, where a is a constant, and that $y=48$, when $x=10$ and $y=30$, when $x=20$; find a and write down the definite relation between x and y.

14. If 20 men earn Rs. 800 in 4 weeks, how many men will earn Rs. 1250 in 5 weeks at the same rate?

15. If 12 men earn Rs. 810 in 15 days, how much will 34 men earn in 25 days at the same rate?

16. Area of a circle varies as the square of its radius. The area of a circle whose radius is 10 ft. 6 in. is $346\frac{1}{2}$ sq. ft.; find the area of a circle whose radius is 7 feet.

17. Area of a triangle varies jointly as the base and altitude. The area of a triangle is 15 sq. ft., when the the base is 6 ft. and the altitude 5 ft. Find the altitude of a triangle whose area is 40 sq. ft. and the base 8 ft.

18. The weight, w, of a body varies jointly as its height, h, and the square of the diameter, d, of its base. $w=25$, when $h=2{\cdot}5$ and $d=2$. Find the value of w, when $h=4$ and $d=0{\cdot}6$; also find d, when $w=7{\cdot}2$ and $h=2$.

19. The mass m of a body varies as density d, when the volume v is constant, and varies as the volume v when density d is constant. If unit mass be defined as mass of a body of unit volume and unit density, show that $m=vd$.

[C. U. 1929]

20. The volume of a sphere varies as the cube of the radius and the surface of a sphere varies as the square of the radius Show that the square of the volume varies as the cube of the surface. [C. U. 1924]

21. If $x^2+y^2 \propto xy$, show that $x+y \propto x-y$.

22. If $x \propto y$ and $y \propto z$, and if a, b, c, and a', b', c' be two sets of values of x, y, z, show that

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{aa'+bb'+cc'}=\frac{aa'+bb'+cc'}{a'^2+b'^2+c'^2}$$ [C. U. Int. 1922]

23. The time of oscillation of a pendulum varies as the square root of its length. If a pendulum of length 40 inches oscillates once in a second, what is the length of the pendulum oscillating once in 2·5 seconds? [C. U. Int. 1913]

পঞ্চম অধ্যায়

লগারিদম্ (Logarithm)

1. Logarithm—(লগারিদম্)

আমরা জানি, $4^3 = 64$.

এস্থলে, 4-সংখ্যাটিকে বলা হয় **নিধান** (Base), 4-এর মাথায় 3 সংখ্যাটি **ঘাত** বা **শক্তির** সূচক (Index of power) এবং 64 সংখ্যাটি 4-এর তৃতীয় ঘাত (Third power).

উক্তস্থলে, 4^3 এর মান 4-কে 3 বার পর পর গুণ করিলেই পাওয়া যায়, কোন্ সংখ্যার তৃতীয় ঘাত 64 তাহাও 64 এর ঘন মূল নির্ণয় করিলেই পাওযা যায়, কিন্তু 4-কে কত ঘাতে উন্নয়ন করিলে 64 হয তাহা উক্ত কোন নিয়মে নির্ণয় করা যায় না।

Logarithm-এর সাহায্যে উহা সহজেই নির্ণয় করা যায়। Logarithm শব্দটির অর্থ "Ratio-number". ইহার অর্থ নিম্নরূপে প্রকাশ করা যায়।

কোন সংখ্যাকে অপর কোন সংখ্যার শক্তিরূপে প্রকাশ করিলে উক্ত শক্তির সূচককে (Index), দ্বিতীয় সংখ্যাকে নিধান করিয়া প্রথম সংখ্যার Logarithm, সংক্ষেপে log বলা হয়।

$a^x = N$-কে $x = \log_a N$ এইরূপে প্রকাশ করা হয়, তদ্রূপ—

$2^5 = 32$, এস্থলে $5 = \log_2 32$; $5^2 = 25$, এস্থলে $2 = \log_5 25$;

$10^2 = 100$, এস্থলে $2 = \log_{10} 100$.

2. লগারিদ্মের কতিপয় সূত্র।

(*i*) $\boldsymbol{\log_a (N_1 \times N_2) = \log_a N_1 + \log_a N_2}$

ধর $N_1 = a^m$ এবং $N_2 = a^n$; তাহা হইলে $\log_a N_1 = m$ এবং $\log_a N_2 = n$

এখন, $N_1 \times N_2 = a^m \times a^n = a^{m+n}$;

তাহা হইলে $\log_a (N_1 \times N_2) = m + n$

অতএব $\log_a (N_1 \times N_2) = \log_a N_1 + \log_a N_2$.

তদ্রূপ, $\log_a(N_1 \times N_2 \times N_3 \times \cdots) = \log_a N_1 + \log_a N_2 + \log_a N_3 + \cdots$

সুতরাং, **কতিপয় সংখ্যার গুণফলের লগ্ সংখ্যাগুলির লগের সমষ্টির সমান।**

(ii) $\boldsymbol{\log_a\left(\frac{N_1}{N_2}\right) = \log_a N_1 - \log_a N_2}$

ধর $N_1 = a^m$ এবং $N_2 = a^n$

তাহা হইলে, $\log_a N_1 = m$ এবং $\log_a N_2 = n$

এখন, $\frac{N_1}{N_2} = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

তাহা হইলে $\log_a\left(\frac{N_1}{N_2}\right) = m - n = \log_a N_1 - \log_a N_2$

সুতরাং, **দুইটি সংখ্যার ভাগফলের লগ্ সংখ্যা দুইটির লগের অন্তরের সমান।**

(iii) $\boldsymbol{\log_a N^p = p \log_a N}$.

ধর $N = a^m$, তাহা হইলে $\log_a N = m$

$\therefore \quad N^p = (a^m)^p = a^{mp}$

তাহা হইলে $\log_a N^p = m.p = pm = p.\log_a N$

$\therefore \quad \log_a N^p = p \log_a N.$

সুতরাং **কোন সংখ্যার যে কোন শক্তির লগ্ সংখ্যাটির লগ্ ও উক্ত শক্তির সূচকের গুণফলের সমান।**

দ্রষ্টব্য। যেহেতু, $\sqrt{N} = N^{\frac{1}{2}} \quad \therefore \log \sqrt{N} = \log N^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \log N$

$\sqrt[3]{N} = N^{\frac{1}{3}} \quad \therefore \log \sqrt[3]{N} = \log N^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \log N$

$\sqrt[4]{N} = N^{\frac{1}{4}} \quad \therefore \log \sqrt[4]{N} = \log N^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4} \log N.$

(iv) $\boldsymbol{\log_a N = \log_b N \times \log_a b}$.

ধর, $\log_a N = x$ এবং $\log_b N = y$.

তাহা হইলে $a^x = N$ এবং $b^y = N$

$\therefore \quad a^x = b^y$ or $b = a^{\frac{x}{y}}$

সুতরাং $\log_a b = \dfrac{x}{y} = \dfrac{\log_a N}{\log_b N}$

$$\log_a N = \log_b N \times \log_a b.$$

$$\boldsymbol{\log_b a = \frac{1}{\log_a b}}$$

ধর $\log_a b = x$

তাহা হইলে, $a^x = b$

$\therefore \quad a = b^{\frac{1}{x}}$

$\therefore \quad \log_b a = \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{\log_a b}$

3. **সাধারণ লগারিদ্‌ম।** 10কে নিধান (base) ধরিয়া যে লগারিদ্‌মের ব্যবহার হয় তাহাকে **সাধারণ লগারিদ্‌ম** (Common logarithm) বলে। সাধারণ লগারিদ্‌মে নিধান 10এর উল্লেখ সাধারণতঃ করা হয় না।

সূচকের নিয়ম অনুসারে, $a^0 = 1$

এখন $a = 10$ ধরিলে, $10^0 = 1$, $\therefore \quad 0 = \log_{10} 1$

আমরা জানি $10^1 = 10 \quad \therefore \quad \log 10 = 1$

$10^2 = 100 \quad \therefore \quad \log 100 = 2$

$10^3 = 1000 \quad \therefore \quad \log 1000 = 3$

$10^4 = 10000 \quad \therefore \quad \log 10000 = 4.$

উদা. 1. If $\log 2 = \cdot 3010$ and $\log 3 = \cdot 4771$;
find $\log 5$, $\log 6$ and $\log 8$

$\log 5 = \log (10 \div 2) = \log 10 - \log 2 = 1 - \cdot 3010 = \cdot 6990$

$\log 6 = \log (2 \times 3) = \log 2 + \log 3 = \cdot 3010 + \cdot 4771 = \cdot 7781$

$\log 8 = \log 2^3 = 3 \log 2 = 3 \times \cdot 3010 = \cdot 9030.$

উদা. 2. If $\log 15 = 1{\cdot}1761$ and $\log 5 = {\cdot}6990$, find $\log 3$.

$\log 3 = \log (\frac{15}{5}) = \log 15 - \log 5 = 1{\cdot}1761 - {\cdot}6990 = {\cdot}4771.$

উদা. 3. If $\log 36 = 1{\cdot}5563$, find $\log \sqrt[3]{36}$.

$$\log \sqrt[3]{36} = \log 36^{\frac{1}{3}} = \tfrac{1}{3} \log 36 = \tfrac{1}{3} \times 1{\cdot}5563 = {\cdot}5187.$$

উদা. 4. If $\log 2 = {\cdot}3010$, find $\log 25$

$$\log 25 = \log 5^2 = 2 \log 5 = 2 \log (10 \div 2)$$
$$= 2(\log 10 - \log 2) = 2(1 - {\cdot}3010) = 2 \times {\cdot}6990 = 1{\cdot}3980.$$

উদা. 5. If $\log 2 = {\cdot}3010$ and $\log 7 = {\cdot}8451$, find $\log \left(\frac{49}{8}\right)^{\frac{1}{2}}$.

$$\log \left(\tfrac{49}{8}\right)^{\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{2} \log \tfrac{49}{8} = \tfrac{1}{2}(\log 49 - \log 8)$$
$$= \tfrac{1}{2}(\log 7^2 - \log 2^3) = \tfrac{1}{2}(2 \log 7 - 3 \log 2)$$
$$= \tfrac{1}{2}(2 \times {\cdot}8451 - 3 \times {\cdot}3010)$$
$$= \tfrac{1}{2}(1{\cdot}6902 - {\cdot}9030) = \tfrac{1}{2} \times {\cdot}7872 = {\cdot}3936.$$

উদা. 6. Find the logarithm of 16 to the base 8.

মনে কর $\log_8 16 = x$

তাহা হইলে সংজ্ঞা অনুসারে $8^x = 16$

or $(2^3)^x = 2^4$ or $2^{3x} = 2^4$

$\therefore$ $3x = 4$ or $x = \frac{4}{3}$. $\therefore$ $\log_8 16 = \frac{4}{3}$.

প্রশ্নমালা 13

(Given, $\log 2 = {\cdot}3010$, $\log 3 = {\cdot}4771$, $\log 7 = {\cdot}8451$.)

Find the logarithm of :

1. 4 **2.** 42 **3.** 35 **4.** 48

5. 125 **6.** 525 **7.** 243 **8.** 2100

9. $\frac{25}{9}$ **10.** $\frac{21}{8}$ **11.** $33\frac{1}{3}$ **12.** $\frac{98}{27}$

13. $\sqrt{6}$ **14.** $\sqrt[3]{50}$ **15.** $24^{\frac{1}{4}}$ **16.** $625^{\frac{1}{3}}$

17. Find the logarithm of 144 to the base $2\sqrt{3}$.

18. Find the logarithm of 1728 to the base $\frac{1}{2\sqrt{3}}$.

4. পূর্ণক ও অংশক (Characteristic and Mantissa)।

পূর্বেই দেখান হইয়াছে $\log 1 = 0$, $\log 10 = 1$, $\log 100 = 2$, $\log 1000 = 3$; একটু লক্ষ্য করিলেই দেখা যাইবে 1 হইতে 10 এর মধ্যবর্তী সংখ্যাসমূহের লগ 0 অপেক্ষা বেশী কিন্তু 1 অপেক্ষা কম অর্থাৎ একটি ভগ্নাংশ। 10 হইতে 100 বা 10^2 এর মধ্যবর্তী সংখ্যাসমূহের লগ 1 অপেক্ষা বেশী কিন্তু 2 অপেক্ষা কম অর্থাৎ 1+ একটি ভগ্নাংশ। 100 বা 10^2 হইতে 1000 বা 10^3 এর মধ্যবর্তী সংখ্যাসমূহের লগ 2+ একটি ভগ্নাংশ। 1000 বা 10^3 হইতে 10000 বা 10^4 এর মধ্যবর্তী সংখ্যাসমূহের লগ 3+ একটি ভগ্নাংশ, ইত্যাদি। এই ভগ্নাংশসমূহ সাধারণতঃ দশমিক আকারে প্রকাশ করা হয়। কোন সংখ্যার লগের পূর্ণ সংখ্যাকে **পূর্ণক** (Characteristic) এবং দশমিকাংশকে **অংশক** (Mantissa) বলে।

0 হইতে 1 এর মধ্যবর্তী সংখ্যাসমূহের লগ ঋণাত্মক ; কারণ

$$\cdot 1 = \tfrac{1}{10} = 10^{-1} \qquad \therefore \log \cdot 1 = -1,$$

$$\cdot 01 = \tfrac{1}{100} = \frac{1}{10^2} = 10^{-2} \qquad \therefore \log \cdot 01 = -2.$$

$$\cdot 001 = \tfrac{1}{1000} = \frac{1}{10^3} = 10^{-3} \qquad \therefore \log \cdot 001 = -3$$

ধর, দেওয়া আছে, $\log 54 = 1{\cdot}7314$, তাহা হইলে,

$\log 5{\cdot}4 = \log \frac{54}{10} = \log 54 - \log 10 = 1{\cdot}7324 - 1 = {\cdot}7324$

$\log {\cdot}54 = \log \frac{54}{100} = \log 54 - \log 100 = 1{\cdot}7324 - 2 = -{\cdot}2676$

হিসাবের সুবিধার জন্য লগারিদ্‌মের অংশক (দশমিকাংশ) সর্বদাই ধনাত্মক রাখার রীতি। ইহা করিতে হইলে অংশক বা দশমিকাংশের সহিত 1 যোগ এবং

পূর্ণক হইতে 1 বিয়োগ করিতে হয়। এতদ্বারা লগারিদ্‌মের মানের কোন পরিবর্তন হয় না।

$\log \cdot 54 = -\cdot 2676 = -1 + (1 - \cdot 2676) = -1 + \cdot 7324 = \bar{1}\cdot 7324.$

এস্থলে পূর্ণক $\bar{1}$-এর অর্থ -1, সুতরাং ইহা ঋণাত্মক কিন্তু অংশক $\cdot 7324$ ধনাত্মক

তদ্রূপ, $\log \cdot 054 = \log \frac{54}{1000} = \log 54 - \log 1000 = 1\cdot 7324 - 3$

$= 1 + \cdot 7324 - 3 = -2 + \cdot 7324 = \bar{2}\cdot 7324.$

5. লগারিদ্‌মের পূর্ণক নির্ণয়ের সঙ্কেত।

পূর্ণসংখ্যা যুক্ত কোন সংখ্যার পূর্ণসংখ্যায় 1টি অঙ্ক থাকিলে উহার লগের পূর্ণক হইবে 0, 2টি অঙ্ক থাকিলে পূর্ণক হইবে 1, 3টি অঙ্ক থাকিলে পূর্ণক হইবে 2, 4টি অঙ্ক থাকিলে পূর্ণক হইবে 3, ইত্যাদি। আবার পূর্ণসংখ্যা বিহীন কোন সংখ্যার প্রথম দশমিক স্থানে সার্থক অঙ্ক থাকিলে উহার লগের পূর্ণক হইবে $\bar{1}$ (বা -1), প্রথম দশমিক স্থান 0 থাকিলে পূর্ণক হইবে $\bar{2}$, প্রথম ও দ্বিতীয় দশমিক স্থানে 0 থাকিলে পূর্ণক হইবে $\bar{3}$, ইত্যাদি।

উদা. 1. Given $\log 26\cdot 47 = 1\cdot 4227$, find

$\log 2647$, $\log 264\cdot 7$, $\log 2\cdot 647$, $\log \cdot 2647$, $\log \cdot 02647$, $\log \cdot 002647$.

$\log 26\cdot 47 = 1\cdot 4227$

$\therefore \log 2647 = 3\cdot 4227$

$\log 264\cdot 7 = 2\cdot 4227 \qquad \log \cdot 2647 = \bar{1}\cdot 4227$

$\log 26\cdot 47 = 1\cdot 4227 \qquad \log \cdot 02647 = \bar{2}\cdot 4227$

$\log 2\cdot 647 = 0\cdot 4227 \qquad \log \cdot 002647 = \bar{3}\cdot 4227.$

উদা. 2. Add together : $1\cdot 7482 + \bar{3}\cdot 2833 + 0\cdot 9504$

$1\cdot 7482 + \bar{3}\cdot 2833 + 0\cdot 9504$

$= 1 + \cdot 7482 - 3 + \cdot 2833 + \cdot 9504$

$= 1 - 3 + 1\cdot 9819 = 1 - 3 + 1 + \cdot 9819$

$= -1 + \cdot 9819 = \bar{1}\cdot 9819.$

সংক্ষেপে.

$$\begin{array}{r} 1\cdot 7482 \\ \bar{3}\cdot 2833 \\ 0\cdot 9504 \\ \hline \bar{1}\cdot 9819 \end{array}$$

উদা. 3. Find the value of : $1\cdot 5706 - \bar{3}\cdot 8089.$

প্রদত্ত রাশি $= 1 + \cdot 5706 - (-3 + \cdot 8089)$

$= 1 + \cdot 5706 + 3 - \cdot 8089$

$= 4\cdot 5706 - \cdot 8089 = 3\cdot 7617$

সংক্ষেপে,

$$\begin{array}{r} 1\cdot 5706 \\ \bar{3}\cdot 8089 \\ \hline 3\cdot 7617 \end{array}$$

উদা. 4. (i) Multiply and (ii) divide $\bar{1}\cdot7324$ by 8.

সংক্ষেপে,
$$\begin{array}{r} \bar{1}\cdot7324 \\ 8 \\ \hline \bar{3}\cdot8592 \end{array}$$

(*i*) $\bar{1}\cdot7324\times8=(-1+\cdot7324)\times8=-8+5\cdot8592$
$=-8+5+\cdot8592=-3+\cdot8592=\bar{3}\cdot8592$

(*ii*) $\bar{1}\cdot7324\div8=(-1+\cdot7324)\div8=(-8+7+\cdot7324)\div8$
$=(-8+7\cdot7324)\div8=-1+\cdot9666=\bar{1}\cdot9666$

উদা. 5. Given $\log 11=1\cdot0414$, $\log 3=\cdot4771$, $\log 2=\cdot3010$; find $\log\left(\frac{27}{55}\right)^{\frac{1}{2}}$.

$$\log\left(\frac{27}{55}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\log\left(\frac{27}{55}\right)=\frac{1}{2}(\log 27-\log 55)$$
$=\frac{1}{2}\{\log 3^3-\log(5\times11)\}=\frac{1}{2}\{3\log 3-\log 5-\log 11\}$
$=\frac{1}{2}\{3\log3-\log\frac{10}{2}-\log 11\}=\frac{1}{2}\{3\log 3-(\log 10-\log 2)-\log 11\}$
$=\frac{1}{2}\{3\times\cdot4771-(1-\cdot3010)-1\cdot0414\}=\frac{1}{2}\{1\cdot4313-\cdot6990-1\cdot0414\}$
$=\frac{1}{2}(1\cdot4313-1\cdot7404)=-\frac{1}{2}(\cdot3091)=-\cdot1546=-1+\cdot8454=\bar{1}\cdot8454$

প্রশ্নমালা 14

1. Given $\log 7643=3\cdot8833$; find
$\log 764\cdot3$, $\log 76\cdot43$, $\log 7\cdot643$, $\log\cdot7643$, $\log\cdot07643$, $\log\cdot007643$.

2. Give the answers upto four decimal places :

(1) $2\cdot7853+\bar{3}\cdot3802$ (2) $\bar{1}\cdot4655+\bar{2}\cdot7084$

(3) $\bar{2}\cdot3365-\bar{1}\cdot7103$ (4) $\bar{3}\cdot8532-1\cdot8827$

(5) $\bar{1}\cdot7832\times4$ (6) $\bar{2}\cdot0095\times3$

(7) $\bar{3}\cdot8123\div7$ (8) $\frac{3}{5}\times\bar{1}\cdot8345$

3. Given $\log 2=\cdot3010$, $\log 3=\cdot4771$, find the value of :

(1) $\log\frac{3}{16}$, (2) $\log\frac{3}{25}$, (3) $\log\frac{15}{8}$,

(4) $\log\sqrt[3]{\frac{1}{5}}$, (5) $\log\left(\frac{128}{45}\right)^{\frac{1}{2}}$

6. লগ্ তালিকা (Log Table)। কোন সংখ্যার লগারিদ্‌ম যে কোন দশমিক স্থান পর্যন্ত নির্ণয় করা যায়। চেম্বারের লগ্ তালিকায় সাত দশমিক স্থান পর্যন্ত উত্তর দেওয়া আছে। কিন্তু এই তালিকার আকার বৃহৎ। চারি দশমিক স্থান পর্যন্ত হিসাবেও সাধারণ ভাবে কাজ চলিতে পারে। চারি দশমিক স্থানের তালিকার সাহায্যে 1 হইতে 9999 পর্যন্ত সমস্ত সার্থক অঙ্কের কাজ চলিতে পারে। এই পুস্তকে চারি দশমিক স্থানের তালিকা দেওয়া হইল। এই তালিকায় মাত্র অংশক দেওয়া আছে ; পূর্ণক নির্ণয়ের সঙ্কেত পূর্বেই বলা হইয়াছে।

7. এণ্টিলগ্ (Antilog)। যে সংখ্যার লগারিদ্‌ম প্রদত্ত কোন সংখ্যা তাহাকে উহার এণ্টিলগারিদ্‌ম বা সংক্ষেপে এণ্টিলগ্ বলে।

$\cdot 3861 = \log 2\cdot433 \quad \therefore \quad \text{Antilog } \cdot3161 = 2\cdot433.$

লগারিদ্‌মের সাহায্যে অঙ্ক কষার জন্য দুইটি তালিকার প্রয়োজন। একটি লগ তালিকা এবং অপরটি এণ্টিলগ্ তালিকা।

8. লগ্ তালিকার ব্যবহার (Use of Log Tables)।

মাত্র সার্থক অঙ্ক দেখিয়া লগ্ তালিকা ব্যবহার করিতে হয়। পূর্বের হিসাব মত পূর্ণক বসাইয়া লইতে হয়।

ধর log 357 নির্ণয় করিতে হইবে। প্রথম তালিকার একেবারে বাঁ দিকে 35 বাহির কর। এই লাইন ঠিক রাখিয়া ডান দিকে অগ্রসর হইয়া দেখ একেবারে উপরে কোথায় 7 আছে। 35 এর লাইন এবং 7 এর স্তম্ভের মিলন স্থানে দেখ রহিয়াছে 5527। প্রদত্ত সংখ্যা 357 এর পূর্ণ সংখ্যার অঙ্কসংখ্যা 3, সুতরাং উহার পূর্ণক হইবে 2. অতএব $\log 357 = 2\cdot5527$.

যদি $\log 35\cdot7$ নির্ণয় করিতে হইত, উত্তর হইত $1\cdot5527$

তদ্রূপ $\log 3\cdot57 = 0\cdot5527$, $\log \cdot357 = \bar{1}\cdot5527$, $\log \cdot0357 = \bar{2}\cdot5527$,

$\log 3570 = 3\cdot5527$, ইত্যাদি।

আবার ধর log 8296 নির্ণয় করিতে হইবে

পূর্বের মত প্রথম তালিকার একেবারে বাঁদিক্ হইতে 82 বাহির করিয়া সেই লাইন ধরিয়া ডান দিকে গিয়া দেখ একেবারে উপরে কোন্ স্থানে 9 আছে। বাঁ দিকের 82 এর লাইন এবং উপরের 9 এর স্তম্ভের মিলন স্থানে দেখ—আছে 9186।

82-এর লাইনে আরও ডান দিকে ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র অক্ষরের আর একটি তালিকা আছে ঐ তালিকার একেবারে উপরে যেখানে 6 আছে সেই স্তম্ভ ও বাঁদিকে 82-এর লাইনের মিলন স্থানে একটি অঙ্ক 3 আছে। এই 3 পূর্বে প্রাপ্ত 9186 এর সহিত যোগ করিয়া যোগফল পাওয়া যায় 9189। 8296 এর পূর্ণ সংখ্যার অঙ্কসংখ্যা 4টি। সুতরাং পূর্ণক হইবে 3। $\therefore$ $\log 8296 = 3{\cdot}9189$

এইফল হইতে অতি সহজেই এখন বাহির করা যায় $\log 829{\cdot}6 = 2{\cdot}9189$,

$\log 82{\cdot}96 = 1{\cdot}9189$, $\log 8{\cdot}296 = 0{\cdot}9189$, $\log {\cdot}8296 = \bar{1}{\cdot}9189$,

$\log {\cdot}08296 = \bar{2}{\cdot}9189$, $\log 82960 = 4{\cdot}9189$.

9. এন্টিলগ্ তালিকার ব্যবহার (Use of Antilog tables)

এই তালিকার সাহায্যে এন্টি লগ্ (Antilogarithm) অর্থাৎ কোন্ সংখ্যার লগ্ প্রদত্ত সংখ্যা তাহা নির্ণয় করা যায়। এন্টিলগ্ তালিকার ব্যবহার প্রণালী লগ্ তালিকার ব্যবহার প্রণালীর অনুরূপ। ধর 3·8499, 2·8499, 1·8499, 0·8499, $\bar{1}{\cdot}8499$, $\bar{2}{\cdot}8499$—ইহাদের এন্টি লগ্ নির্ণয় করিতে হইবে। দ্বিতীয় তালিকার একেবারে বাঁ দিক্ হইতে ·84 বাহির কর। এই লাইন ধরিয়া ডান দিকে অগ্রসর হইয়া দেখ একেবারে উপরে কোন্ স্থানে 9 আছে। বাঁ দিকের ·84-এর লাইন এবং উপরের 9 এর স্তম্ভের মিলন স্থানে দেখ আছে 7063, 84-এর লাইনের আরও ডান দিকে যে ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র অক্ষরের আর একটি তালিকা আছে ঐ তালিকার একেবারে উপরে যেখানে 9 আছে সেই স্তম্ভ ও বাঁ দিকের 84 এর লাইনের মিলন স্থানে দেখ—আছে 15। পূর্ব লব্ধ 7063 ও এই 15 যোগ করিলে হয় 7078। এখন 3·8499 এর এন্টি লগ্ হইবে 7078.

লগের পূর্ণক 3 বলিয়া এন্টি লগ্ অর্থাৎ নির্ণেয় সংখ্যার পূর্ণসংখ্যায় 4টি অঙ্ক থাকিবে।

তদ্রূপ, 2·8499 এর এন্টি লগ্ হইবে 707·8

1·8499 এর এন্টি লগ্ হইবে 70·78

0·8499 এর এন্টি লগ্ হইবে 7·078

$\bar{1}{\cdot}8499$ এর এন্টি লগ্ হইবে ·7078

$\bar{2}{\cdot}8499$ এর এন্টি লগ হইবে ·07078.

উদা. 1. Find the product of $3\cdot7 \times \cdot96$, using log tables.

$\log(3\cdot7 \times \cdot96) = \log 3\cdot7 + \log \cdot96$

$= 0\cdot5682 + \bar{1}\cdot9823$ [লগ্ তালিকা দেখিয়া]

$= 0\cdot5505$

$= \log 3\cdot552$, (এন্টি লগ্ তালিকা দেখিয়া)

$\therefore \quad 3\cdot7 \times \cdot96 = 3\cdot552.$

সাধারণ গুণ করিয়া পরীক্ষা করিয়া দেখ $3\cdot7 \times \cdot96 = 3\cdot552$.

উদা. 2. Find the value of $0\cdot2377 \div 8\cdot721$, using log tables.

$$\log \frac{0\cdot2377}{8\cdot721} = \log 0\cdot2377 - \log 8\cdot721$$

$$= \bar{1}\cdot3760 - \cdot9405$$

$$= \bar{2}\cdot4355$$

$$= \log \cdot02726.$$

$$\therefore \quad 0\cdot2377 \div 8\cdot721 = \cdot02726.$$

সাধারণ নিয়মে 0·2377-কে 8·721 দ্বারা ভাগ করিয়া পরীক্ষা করিয়া দেখ ভাগফল ·02726 (পঞ্চম দশমিক স্থান পর্যন্ত আসন্ন মান)।

উদা. 3. Evaluate $\dfrac{(489\cdot2)^2 \times \cdot0003317}{(19\cdot82)^3}$

(*i*) **Index Method :**

$y = \log_{10}x$ এবং $10^y = x$ অভিন্ন এবং লগ্ প্রকৃতপক্ষে শক্তির সূচক

সুতরাং Index Methodএ সংখ্যাসমূহকে 10-এর শক্তিরূপে প্রকাশ করা হইয়া থাকে।

$$\frac{(489\cdot2)^2 \times \cdot0003317}{(19\cdot82)^3}$$

$$= 10^{2 \times \log 489\cdot2} \times 10^{\log \cdot0003317} \div 10^{3 \times \log 19\cdot82}$$

$$= 10^{2 \times 2\cdot6895} \times 10^{\bar{4}\cdot5207} \div 10^{3 \times 1\cdot2971}$$

$$= 10^{5\cdot3790 + \bar{4}\cdot5207 - 3\cdot8913} = 10^{\bar{2}\cdot0084} = \cdot01020$$

(*ii*) **Equation Method :**

ধর $x = \dfrac{(489{\cdot}2)^2 \times {\cdot}0003317}{(19{\cdot}82)^3}$

$\therefore \quad \log x = 2 \log 489{\cdot}2 + \log {\cdot}0003317 - 3 \log 19{\cdot}82$

$= 2 \times 2{\cdot}6895 + \bar{4}{\cdot}5207 - 3 \times 1{\cdot}2971$

$= 5{\cdot}3790 + \bar{4}{\cdot}5207 - 3{\cdot}8913$

$= \bar{2}{\cdot}0084$

$\therefore \quad x = \text{anti log } \bar{2}{\cdot}0084$

$= {\cdot}01020$

$\therefore$ সুতরাং প্রদত্ত রাশি $= {\cdot}01020$.

উদা. 4. Evaluate $\dfrac{1}{({\cdot}0004687)^{\frac{3}{7}}}$

$\log \dfrac{1}{({\cdot}0004687)^{\frac{3}{7}}} = \log 1 - \frac{3}{7} \log {\cdot}0004687$

$= 0 - \frac{3}{7} \times \bar{4}{\cdot}6709$

$= 1{\cdot}4268$

$\therefore$ নির্ণেয় উত্তর $= \text{anti log } 1{\cdot}4268$

$= 26{\cdot}72.$

বিশেষ দ্রষ্টব্য। অধিক সংখ্যক দশমিক স্থানের অঙ্কের ফল প্রায়ই নির্দিষ্ট দশমিক স্থান পর্যন্ত আসন্ন মানের সমান হয়; সুতরাং শেষ অঙ্কে কিছু পার্থক্য থাকিতে পারে।

উদা. 5. $(10{\cdot}25)^{\frac{1}{4}}$-এর চারিটি সার্থক অঙ্ক পর্যন্ত মান নির্ণয় কর।

$\log (10{\cdot}25)^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4} \log 10{\cdot}25 = \frac{1}{4} \times 1{\cdot}0107$ (লগ্ তালিকার সাহায্যে)

$= 0{\cdot}2527$ (চারি দশমিক পর্যন্ত আসন্ন মান ধরিয়া)

$= \log 1{\cdot}789$ (এন্টিলগ্ তালিকার সাহায্যে)

$\therefore \quad (10{\cdot}25)^{\frac{1}{4}} = 1{\cdot}789.$

উদা. 6. If the population of a town increases every year by 1·8 per cent of the population at the beginning of that year, in

how many years will the total increase of population be 30 per cent ? কোন সহরের লোকসংখ্যা প্রতি বৎসর বৎসরের প্রথমে যে লোকসংখ্যা থাকে তাহার 1·8% বাড়ে। কত বৎসরে লোকসংখ্যা মোট 30% বাড়িবে ?

(C. U. I. A.)

ধর প্রথম বৎসরের প্রথমে লোকসংখ্যা ছিল P এবং n বৎসর পরে লোকসংখ্যা যেন বাড়িল 30% অর্থাৎ n বৎসর পরে যেন সংখ্যা হইল ($P. \frac{130}{100}$).

$\therefore \quad P\left(1+\frac{1\cdot8}{100}\right)^n=\frac{130}{100}P.$

বা, $\left(\frac{101\cdot8}{100}\right)^n=\frac{130}{100}$ বা $(1\cdot018)^n=1\cdot3$

$\therefore \quad \log(1\cdot018)^n=\log 1\cdot3$

বা, $n\log 1\cdot018=\log 1\cdot3$

বা, $n(0\cdot0077)=0\cdot1139$ (লগ্ তালিকার সাহায্যে)

$\therefore \quad n=\frac{\cdot1139}{\cdot0077}=\frac{1139}{77}=14\cdot8$

$\therefore$ নির্ণেয় বৎসরের সংখ্যা $=14\cdot8$ বৎসর (প্রায়)।

উদা. 7. Prove that $\log\frac{75}{16}-2\log\frac{5}{9}+\log\frac{32}{243}=\log 2$

(C. U. 1951)

বাম পক্ষ $=\log 75-\log 16-2(\log 5-\log 9)+\log 32-\log 243$

$=\log(3\times5^2)-\log 2^4-2(\log 5-\log 3^2)+\log 2^5-\log 3^5$

$=\log 3+2\log 5-4\log 2-2\log 5+4\log 3+5\log 2-5\log 3$

$=5\log 3-5\log 3+2\log 5-2\log 5+5\log 2-4\log 2$

$=\log 2$

উদা. 8. Determine the number of digits of 2^{30}

ধর $x=2^{30}$; তাহা হইলে $\log x=\log 2^{30}$

বা, $\log x=30\log 2=30\times\cdot3010$ [লগ্ তালিকা দেখিয়া]

$=9\cdot0300$

$\log x$ এর পূর্ণক 9

$\therefore$ x এর অঙ্ক সংখ্যা $=10$

অর্থাৎ 2^{30} এর অঙ্ক সংখ্যা $=10$

উদা. 9. If $\log_a b = 10$ and $\log_{6a}(32b) = 5$, find a.

(C. U. 1949)

$\log_a b = 10 \quad \therefore \quad a^{10} = b$ ... (i)

$\log_{6a}(32b) = 5 \quad \therefore \quad (6a)^5 = 32b$

বা, $2^5 . 3^5 . a^5 = 2^5 . b$

বা, $(3a)^5 = b$ ...(ii)

$\therefore$ (i) এবং (ii) হইতে, $a^{10} = (3a)^5$

বা, $(a^2)^5 = (3a)^5$

$\therefore$ $a^2 = (3a)$

বা, $a = 3$

উদা. 10. Prove that $\log_a m = \log_b m . \log_a b$

(C. U. Int. 1932)

ধর $\log_b m = x$ এবং $\log_a b = y$;

তাহা হইলে $b^x = m$ এবং $a^y = b$

$\therefore$ $(a^y)^x = b^x$

বা, $a^{xy} = b^x = m$

$\therefore$ $\log_a m = xy = \log_b m . \log_a b$

উদা. 11. If $\log(x^3y^2) = 3a + 2b$, $\log(x^2y^3) = 2a + 3b$, find $\log x$ and $\log y$ in terms of a and b.

$\log(x^3y^2) = 3a + 2b.$

বা, $3\log x + 2\log y = 3a + 2b$ ... (i)

$\log(x^2y^3) = 2a + 3b$

বা, $2\log x + 3\log y = 2a + 3b$ ... (ii)

(i) এবং (ii) যোগ করিয়া, $5\log x + 5\log y = 5(a+b)$

বা, $\log x + \log y = a + b$ ... (iii)

(i) হইতে (ii) বিয়োগ করিয়া,

$\log x - \log y = a - b$ ... (iv)

(iii) এবং (iv) হইতে যোগ বিয়োগ করিয়া,

$2 \log x = 2a$ এবং $2 \log y = 2b$

$\therefore \quad \log x = a, \log y = b$

উদা. 12. Prove that

$$x^{\log y - \log z} \times y^{\log z - \log x} \times z^{\log x - \log y} = 1 \quad \text{(C. U. '55,)}$$

ধর বাম পক্ষ $= A$; তাহা হইলে

$$\log A = (\log y - \log z) \log x + (\log z - \log x) \log y + (\log x - \log y) \log z$$
$$= 0$$

$\therefore \quad A = 1$ অর্থাৎ বাম পক্ষ $= 1$

উদা. 13. Solve the equations $2^x 7^y = 80000$, $3^y = 500$, having given $\log 2 = \cdot 30103$, $\log 3 = \cdot 47712$ and $\log 7 = \cdot 84510$. The values of x and y are to be found correct to 4 decimal places.

(C. U. Int. 1947)

দ্বিতীয় সমীকরণ হইতে, $\log 3^y = \log 500$

বা, $y \log 3 = \log 500 = \log \frac{1000}{2}$
$= \log 1000 - \log 2$
$= 3 - \cdot 30103 = 2 \cdot 69897$

$$\therefore \quad y = \frac{2\cdot 69897}{\log 3} = \frac{2\cdot 69897}{\cdot 47712} = 5\cdot 6568 \text{ (nearly)}$$

প্রথম সমীকরণ হইতে, $\log (2^x 7^y) = \log 80000$

বা, $x \log 2 + y \log 7 = \log 80000 = \log (2^3 . 10000)$
$= 3 \log 2 + \log 10000 = 3 \log 2 + 4$
$= 3 \times \cdot 30103 + 4 = 4 \cdot 90309$

$\therefore \quad x \times \cdot 30103 = 4\cdot 90309 - y \log 7 = 4\cdot 90309 - 5\cdot 6568 \times \cdot 84510$
$= 4\cdot 90309 - 4\cdot 78056 = \cdot 12253$

$$\therefore \quad x = \frac{\cdot 12253}{\cdot 30103} = \cdot 40703 \text{ (nearly)}$$

প্রশ্নমালা 15

1. Find the logarithm of (using log tables) :

(1) 35 (2) 14·7 (3) 3·27 (4) ·1975

(5) $\frac{113}{218}$ (6) $327^{\frac{1}{2}}$ (7) $\sqrt[3]{150}$ (8) $(143)^{\frac{1}{5}}$

2. Find the antilog of (using antilog tables) :

(1) 1·1268 (2) 0·3854 (3) $\bar{1}$·2614 (4) $\bar{2}$·4167

3. Given log 4132 = 3·6162 ; find log 413·2, log 41·32, log 4·132, log ·4132, and log ·04132.

4. Simplify :

(1) $0·2432+\bar{1}·1652+0·1426$ (2) $1·7244+0·7328+\bar{3}·1449$

(3) $\bar{2}·1629-\bar{1}·2070-0·2075$ (4) $\bar{1}·6457\times 7$

(5) $\bar{1}·1622\times 2$ (6) $\bar{4}·7413\div 3$ (7) $\bar{3}·8128\div 2$

5. Given log 89 = 1·9494 ; find the value of $\left(\frac{89}{100}\right)^{\frac{4}{7}}$

6. Find the answers, correct to four significant figures :

(1) $24·38\times·1937$ (2) $5·627\times·2351$ (3) $2·8\times19·1\times·07$

(4) $·038\times8·4\times1·368$ (5) $21·3\div137·4$ (6) $·2167\div·3921$

(7) $\frac{451}{8736}$ (8) $\frac{·9417}{5·216}$ (9) $\frac{2·13\times5·37}{3·48}$

(10) $\frac{49·01\times0·123}{6·258}$ (11) $\frac{8·136\div10·46}{·0235}$ (12) $\frac{123\div2·67}{5·378}$

(13) $\sqrt{2·1}$ (14) $\sqrt[3]{·71}$ (15) $(31)^{\frac{1}{2}}$ (16) $(·26)^5$

(17) $(·089)^3$ (18) $(1·7)^{\frac{1}{3}}$ (19) $2·34\times(·027)^2$

(20) $\left(\frac{18·42\times3·16}{·3724}\right)^{-\frac{1}{2}}$ (21) $\sqrt[3]{\left(\frac{132\times247}{35}\right)^2}$

7. **Prove that :**

(*i*) $7 \log \frac{16}{15} + 5 \log \frac{25}{24} + 3 \log \frac{81}{80} = \log 2.$ (C. U. 1936)

(*ii*) $7 \log \frac{10}{9} - 2 \log \frac{25}{24} + 3 \log \frac{81}{80} = \log 2.$ (C. U. 1923)

(*iii*) $\log_{10} 2 + 16 \log_{10} \frac{16}{15} + 12 \log_{10} \frac{25}{24} + 7 \log_{10} \frac{81}{80} = 1.$

(C. U. 1940)

8. Find the value of :

$\log \left\{(2{\cdot}7)^8 \times ({\cdot}81)^{\frac{4}{5}} \div (90)^{\frac{5}{4}}\right\}$ to four decimal places.

(C. U. I. A. 1946)

9. Prove that $\log_b a \times \log_c b \times \log_a c = 1.$ (C. U. 1934, 1954)

10. If $a^{8-x}\, b^{5x} = a^{x+5}\, b^{3x}$, show that $x \log \frac{b}{a} = \log a.$

(C. U. 1937)

11. Given $\log 2 = {\cdot}30103$, find the number of digits in 5^{25}.

(C. U. 1947)

12. Find the number of zeroes after the decimal point before the first significant figure in (i) $({\cdot}035)^{11}$ and (ii) $({\cdot}3)^{19}$

13. If $a^{3-x} b^{5x} = a^{x+5} b^{3x}$, show that $x \log \frac{b}{a} = \log a$

(C.U. 1937)

14. Show without using logarithmic tables that $\log_{10} 2$ lies between $\frac{1}{4}$ and $\frac{1}{3}$.

15. Find (with the help of logarithmic tables) to two places of decimals the value of x from the equation $6^{3-4x}.4^{x+5} = 8.$

(C. U. 1945, 1938)

16. Find, by the help of logarithmic tables the values of x and y, correct to two places of decimals, if $2^x = 3^y$ and $2^{y+1} = 3^{x-1}$

(C.U. 1942)

ষষ্ঠ অধ্যায়

অমুলদ রাশি

(Irrational Quantities)

1. অমূলদ রাশি (Irrational Quantity)। পূর্ব শ্রেণীর পাঠ্যাংশে অমূলদ রাশি এবং করণী (Surd) সম্বন্ধে প্রাথমিক আলোচনা করা হইয়াছে। বর্তমান অধ্যায়ে অমূলদ রাশি সম্বন্ধে আরও কিছু আলোচনা করা হইবে।

যে সংখ্যাকে দুইটি অখণ্ড সংখ্যার অনুপাত রূপে প্রকাশ করা যায় তাহাকে **মূলদ রাশি (Rational Quantity)** বলে। $7, \frac{5}{7}, \sqrt{4}$ ইত্যাদি মূলদ রাশি।

আর যে সমস্ত সংখ্যাকে উক্তরূপে দুইটি অখণ্ড সংখ্যার অনুপাত রূপে প্রকাশ করা যায় না তাহাদিগকে **অমূলদ রাশি (Irrational Quantity)** বলে।

$\sqrt{5}, \sqrt[3]{3}, \pi$ ইত্যাদি অমূলদ রাশি।

যখন কোন সংখ্যার কোন মূল সম্পূর্ণরূপে নির্ণয় করা যায় না, অর্থাৎ কোন মূলদ রাশি রূপে প্রকাশ করা যায় না তাহাকে **করণী (Surd)** বলা হয়। সুতরাং করণী মাত্রই অমূলদ রাশি, কিন্তু সমস্ত অমূলদ রাশি করণী নহে।

$\sqrt{a}, \sqrt{x}$ ইত্যাদি বীজগণিতীয় রাশিকে করণী বলা হয়, কারণ কোন বীজগণিতীয় মূলচিহ্নহীন প্রতীক দ্বারা ইহার মান প্রকাশ করা যায় না, অবশ্য a বা x এর এমন পাটীগণিতীয় সাংখ্যমান হইতে পারে যাহাতে $\sqrt{a}$ বা $\sqrt{x}$ করণী নহে, যেমন, $a=16$ হইলে $\sqrt{a}=\sqrt{16}=4.$ এস্থলে a-এর বিশেষ মানের জন্য $\sqrt{a}$ করণী নহে।

2. করণী নিরসন (Rationalisation of Surds).

দুইটি করণীর গুণফল একটি মূলদ সংখ্যা হইলে একটিকে অপরটির **করণী-নিরসক গুণক (Rationalising factor)** বলা হয়।

$$(\sqrt{7}+\sqrt{5})(\sqrt{7}-\sqrt{5})=7-5=2.$$

সুতরাং $(\sqrt{7}+\sqrt{5})$, $(\sqrt{7}-\sqrt{5})$এর এবং $(\sqrt{7}-\sqrt{5})$, $(\sqrt{7}+\sqrt{5})$এর করণী নিরসক গুণক।

$$(a+\sqrt{b})(a-\sqrt{b})=a^2-b$$

সুতরাং $(a-\sqrt{b})$, $(a+\sqrt{b})$ এর এবং $(a+\sqrt{b})$, $(a-\sqrt{b})$-এর করণী নিরসক গুণক। তদ্রূপ, $(x\sqrt{y}\pm a\sqrt{b})$কে $(x\sqrt{y}\mp a\sqrt{b})$ দ্বারা গুণ করিলে গুণফল মূলদ রাশিতে পরিণত হইবে।

3. দ্বিঘাত করণীর করণী-নিরসক গুণক (Rationalising factor of a Binomial Surd)

(i) মনে কর $\sqrt[p]{a}-\sqrt[q]{b}$ একটি দ্বিঘাত করণী,

এখন, $\sqrt[p]{a}-\sqrt[q]{b}=a^{\frac{1}{p}}-b^{\frac{1}{q}}$.

ধর, $a^{\frac{1}{p}}=x$ এবং $b^{\frac{1}{q}}=y$ এবং p ও q এর ল. সা. গু. $=m$.

তাহা হইলে, x^m এবং y^m এর প্রত্যেকেই মূলদ (rational); সুতরাং x^m-y^m একটি মূলদ রাশি।

এখন, m যুগ্ম বা অযুগ্ম অখণ্ড ধনরাশি হইলে, x^m-y^m, $(x-y)$ দ্বারা বিভাজ্য,

এবং $x^m-y^m=(x-y)(x^{m-1}+x^{m-2}.y+x^{m-3}.y^2+\cdots+y^{m-1})$

সুতরাং, করণী-নিরসক গুণক $=x^{m-1}+x^{m-2}.y+x^{m-3}.y^2+\cdots+y^{m-1}$

এবং মূলদ গুণফল $=x^m-y^m$.

(ii) ধর, $a^{\frac{1}{p}}=x$ এবং $b^{\frac{1}{q}}=y$, এবং p ও q এর ল. সা. গু. $=m$.

(a) m যুগ্ম সংখ্যা হইলে, x^m-y^m, $(x+y)$ দ্বারা বিভাজ্য,

$\therefore\ x^m-y^m=(x+y)(x^{m-1}-x^{m-2}.y+x^{m-3}.y^2-\cdots-y^{m-1})$

সুতরাং এস্থলে করণী-নিরসক গুণক

$$=(x^{m-1}-x^{m-2}.y+x^{m-3}.y^2-\cdots-y^{m-1})$$

এবং মূলদ গুণফল $=x^m-y^m$.

(b) m অযুগ্ম হইলে, x^m+y^m, $(x+y)$ দ্বারা বিভাজ্য,

এবং $x^m+y^m=(x+y)(x^{m-1}-x^{m-2}.y+\cdots-x.y^{m-2}+y^{m-1})$

$\therefore$ করণী-নিরসক গুণক $=x^{m-1}-x^{m-2}.y+\cdots-xy^{m-2}+y^{m-1})$

এবং মূলদ গুণফল $=x^m+y^m$.

উদা. 1. $\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$ এর করণী-নিরসক উৎপাদক নির্ণয় কর।

$$\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}=2^{\frac{1}{2}}+3^{\frac{1}{3}}$$

এস্থলে, 2 এবং 3 এর ল. সা. গু. = 6.

সুতরাং $2^{\frac{1}{2}}=x$ এবং $3^{\frac{1}{3}}=y$ হইলে x^6, y^6 এবং x^6-y^6 মূলদ ;

কারণ $x^6=\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^6=2^3$, $y^6=\left(3^{\frac{1}{3}}\right)^6=3^2$ এবং $x^6-y^6=8-9=-1$.

এখন, $x^6-y^6=(x+y)(x^5-x^4y+x^3y^2-x^2y^3+xy^4-y^5)$

সুতরাং $x+y$ অর্থাৎ $\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$ এর করণী-নিরসক গুণক

$$=(x^5-x^4y+x^3y^2-x^2y^3+xy^4-y^5)$$

অর্থাৎ $=2^{\frac{5}{2}}-2^{\frac{4}{2}}.3^{\frac{1}{3}}+2^{\frac{3}{2}}.3^{\frac{2}{3}}-2^{\frac{2}{2}}.3^{\frac{3}{3}}+2^{\frac{1}{2}}.3^{\frac{4}{3}}-3^{\frac{5}{3}}$.

$$=(\sqrt{2})^5-4\sqrt[3]{3}+(\sqrt{2})^3.\sqrt[3]{9}-6+\sqrt{2}.\left(3^{\frac{1}{3}}\right)^4-\left(3^{\frac{1}{3}}\right)^5$$

$$=4\sqrt{2}-4\sqrt[3]{3}+2\sqrt{2}.\sqrt[3]{9}-6+\sqrt{2}.3\sqrt[3]{3}-3.\sqrt[3]{9}$$

উদা. 2. $\sqrt[3]{2}+\sqrt{3}$ এর করণী-নিরসক উৎপাদক নির্ণয় কর।

$$\sqrt[3]{2}+\sqrt{3}=2^{\frac{1}{3}}+3^{\frac{1}{2}}$$

এস্থলে, 2 ও 3 এর ল. সা. গু. = 6

ধর, $2^{\frac{1}{3}}=a$, $3^{\frac{1}{2}}=b$.

$$\therefore\ a^6=\left(2^{\frac{1}{3}}\right)^6=4,\ b^6=\left(3^{\frac{1}{2}}\right)^6=27.$$

এখন, $a^6-b^6=(a+b)(a^5-a^4b+a^3b^2-a^2b^3+ab^4-b^5)$

$\therefore$ $a+b$ এর করণী-নিরসক উৎপাদক

$$=a^5-a^4b+a^3b^2-a^2b^3+ab^4-b^5$$

অর্থাৎ $2^{\frac{1}{3}}+3^{\frac{1}{2}}$ এর করণী-নিরসক উৎপাদক

$$=\left(2^{\frac{1}{3}}\right)^5-\left(2^{\frac{1}{3}}\right)^4.3^{\frac{1}{2}}+\left(2^{\frac{1}{3}}\right)^3.\left(3^{\frac{1}{2}}\right)^2-\left(2^{\frac{1}{3}}\right)^2\left(3^{\frac{1}{2}}\right)^3+2^{\frac{1}{3}}.\left(3^{\frac{1}{2}}\right)^4-\left(3^{\frac{1}{2}}\right)^5$$

$$=2^{\frac{5}{3}}-2^{\frac{4}{3}}.3^{\frac{1}{2}}+2.3.-2^{\frac{2}{3}}.3^{\frac{3}{2}}+2^{\frac{1}{3}}.9-9.3^{\frac{1}{2}}$$

$$=2^{\frac{5}{3}}-2^{\frac{4}{3}}.3^{\frac{1}{2}}+6-3.2^{\frac{2}{3}}.3^{\frac{1}{2}}+9.2^{\frac{1}{3}}-9.3^{\frac{1}{2}}$$

$$=2.\sqrt[3]{4}-2.\sqrt[3]{2}\sqrt{3}+6-3.\sqrt[3]{4}\sqrt{3}+9\sqrt[3]{2}-9.\sqrt{3}.$$

উদা. 3. $\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{5}+1$-এর করণী-নিরসক উৎপাদক নির্ণয় কর।

$$\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{5}+1=5^{\frac{2}{3}}+5^{\frac{1}{3}}+1$$
$$=\left(5^{\frac{1}{3}}\right)^2+5^{\frac{1}{3}}.1+(1)^2$$
$$=a^2+a.1+1^2 \qquad \left[5^{\frac{1}{3}}=a \text{ ধরিয়া}\right].$$

কিন্তু $(a-1)(a^2+a.1+1^2)=a^3-1^3$

∴ $a^2+a.1+1^2$-এর করণী-নিরসক উৎপাদক $=a-1$

∴ $\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{5}+1$ এর করণী নিরসক উৎপাদক $=5^{\frac{1}{3}}-1=\sqrt[3]{5}-1.$

উদা. 4. $\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{2}$-এর করণী-নিরসক উৎপাদক নির্ণয় কর।

$$\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{2}=\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{5}$$

এখন, $(\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{5})(\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{5})$
$$=(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2-(\sqrt{5})^2$$
$$=3+2+2.\sqrt{3}.\sqrt{2}-5$$
$$=2\sqrt{3}.\sqrt{2}$$

আবার $2.\sqrt{3}.\sqrt{2}.\sqrt{3}.\sqrt{2}=12$ একটি মূলদ রাশি।

∴ এস্থলে, করণী-নিরসক উৎপাদক $(\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{5}).\sqrt{3}.\sqrt{2}.$

উদা. 5. $\dfrac{\sqrt[3]{3}+1}{\sqrt[3]{3}-1}$-কে করণীমুক্ত হরে প্রকাশ কর।

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

∴ $(\sqrt[3]{3})^3-1^3=\left\{\left(3^{\frac{1}{3}}\right)-1\right\}\left\{\left(3^{\frac{1}{3}}\right)^2+3^{\frac{1}{3}}.1+1^2\right\}$

সুতরাং এস্থলে $\sqrt[3]{3}-1$-এর করণী-নিরসক উৎপাদক $\left(3^{\frac{1}{3}}\right)^2+3^{\frac{1}{3}}+1.$

এই উৎপাদক দ্বারা প্রদত্ত ভগ্নাংশের লব ও হর উভয়কে গুণ কর :

$$\therefore \frac{\sqrt[3]{3}+1}{\sqrt[3]{3}-1}=\frac{3^{\frac{1}{3}}+1}{3^{\frac{1}{3}}-1}\times\frac{3^{\frac{2}{3}}+3^{\frac{1}{3}}+1}{3^{\frac{2}{3}}+3^{\frac{1}{3}}+1}=\frac{\left(3^{\frac{1}{3}}+1\right)\left(3^{\frac{2}{3}}+3^{\frac{1}{3}}+1\right)}{2}$$

$$=\frac{3+2\cdot3^{\frac{2}{3}}+2\cdot3^{\frac{1}{3}}+1}{2}=\frac{3+2\sqrt[3]{9}+2.\sqrt[3]{3}+1}{2.}.$$

$4+2\sqrt[3]{9}+2\sqrt[3]{3}$

4. দ্বিপদ দ্বিঘাত করণী (Binomial Quadratic Surd).

(*i*) দুইটি অমূলদ রাশি অথবা একটি মূলদ ও একটি অমূলদ রাশির বৈজিক সমষ্টিকে **দ্বিপদ করণী (Binomial surd)** বলা হয়।

$3+\sqrt{5}$, $\sqrt{3}+\sqrt{5}$, $2\sqrt{5}-3\sqrt{2}$ ইত্যাদি দ্বিপদ করণী।

করণীর মূলসূচক সংখ্যা দ্বারা উহার **ক্রম** (order) প্রকাশিত হয়।

$\sqrt{5}$, $8^{\frac{1}{2}}$......**দ্বিঘাত** করণী (surd of second order or quadratic surd)

$\sqrt[3]{5}$, $7^{\frac{1}{3}}$......ত্রিঘাত করণী (cubic surd)

$\sqrt[n]{2}$, $3^{\frac{1}{n}}$......n-তম ক্রমের করণী (surd of nth order)

(*ii*) দ্বিপদ দ্বিঘাত করণীর দুইটি পদের চিহ্ন বিপরীত হইলে, একটিকে অপরটির **বিপরীত করণী** (Conjugate surd) বলে।

$\sqrt{a}+\sqrt{b}$ এবং $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ অথবা $x\sqrt{y}+a\sqrt{b}$ এবং $x\sqrt{y}-a\sqrt{b}$ পরস্পর বিপরীত।

$$\left(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}\right)\left(a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)=a+b$$

ইহা হইতে মনে করা যায় যে কোন করণী ও উহার করণী-নিরসক উৎপাদক পরস্পর বিপরীত, কারণ উহাদের গুণফল একটি মূলদ রাশি উৎপন্ন করে।

5. দ্বিপদ দ্বিঘাত করণী বিষয়ক কতিপয় উপপাদ্য (Properties of Binomial quadratic surds).

(*a*) একজাতীয় দুইটি দ্বিঘাত করণীর গুণফল ও ভাগফল মূলদ।

$a\sqrt{x}$, $b\sqrt{x}$ একজাতী : দুইটি করণী,

এখন, $a\sqrt{x}\times b\sqrt{x}=ab.\sqrt{x}.\sqrt{x}=abx$ (মূলদ)

$$a\sqrt{x}\div b\sqrt{x}=\frac{a\sqrt{x}}{b\sqrt{x}}=\frac{a}{b}\text{ (মূলদ)}$$

(b) একটি দ্বিঘাত করণী কখনও একটি মূলদ রাশি ও একটি দ্বিঘাত করণীর যোগফল বা অন্তরফলের সমান হইতে পারে না।

[A quadratic surd cannot be equal to the sum or difference of a rational quantity and a quadratic surd.]

যদি সম্ভব হয়, মনে কর $\sqrt{a}=b\pm\sqrt{c}$

$\therefore$ বর্গ করিয়া, $a=b^2+c\pm 2b\sqrt{c}$

$$\therefore \quad \sqrt{c}=\pm\frac{a-b^2-c}{2b} \text{ (একটি মূলদ রাশি)}$$

অর্থাৎ একটি করণী একটি মূলদ রাশির সমান; ইহা অসম্ভব।

সুতরাং $\sqrt{a}=b\pm\sqrt{c}$ হইতে পারে না।

(c) যদি $a+\sqrt{b}=c+\sqrt{d}$ হয়, এবং a ও c উভয়ই মূলদ এবং $\sqrt{b}$, $\sqrt{d}$ উভয়ই অমূলদ হয়, তাহা হইলে $a=c$ এবং $b=d$.

যদি $a=c$ না হয়, ধর $a=c+p$,

তাহা হইলে, $c+\sqrt{d}=a+\sqrt{b}$

$$=c+p+\sqrt{b}$$

$$\therefore \quad \sqrt{d}=p+\sqrt{b}$$

বর্গ করিয়া, $d=p^2+b+2p\sqrt{b}$

$$\therefore \quad \sqrt{b}=\frac{d-p^2-b}{2p} \text{ (একটি মূলদ রাশি)}$$

অর্থাৎ একটি করণী একটি মূলদ রাশির সমান, যাহা অসম্ভব;

$\therefore$ $a=c$, সুতরাং $b=d$.

দ্রষ্টব্য। $a-\sqrt{b}=c-\sqrt{d}$ হইলেও, অনুরূপভাবে দেখান যায় যে $a=c$ এবং $b=d$.

$a+\sqrt{b}=c+\sqrt{d}$ এই আকারের সমীকরণ প্রকৃতপক্ষে দুইটি পরস্পর নিরপেক্ষ $a=c$ এবং $b=d$ এই দুইটি সমীকরণের সমান, অবশ্য $\sqrt{b}$ এবং $\sqrt{d}$ অমূলদ হওয়া চাই।

(*d*) যদি $\sqrt{a+\sqrt{b}}=\sqrt{c}+\sqrt{d}$ হয়, তাহা হইলে,

$$\sqrt{a-\sqrt{b}}=\sqrt{c}-\sqrt{d}.$$

$$\sqrt{a+\sqrt{b}}=\sqrt{c}+\sqrt{d}$$

বর্গ করিয়া, $a+\sqrt{b}=c+d+2\sqrt{cd}$

$\therefore\quad a=c+d$ এবং $\sqrt{b}=2\sqrt{cd}$

$\therefore\quad a-\sqrt{b}=c+d-2\sqrt{cd}=(\sqrt{c}-\sqrt{d})^2$

$\therefore\quad \sqrt{a-\sqrt{b}}=\sqrt{c}-\sqrt{d}.$

দ্রষ্টব্য। অনুরূপভাবে, যদি $\sqrt{a-\sqrt{b}}=\sqrt{c}-\sqrt{d}$ হয়, $\sqrt{a+\sqrt{b}}$
$=\sqrt{c}+\sqrt{d}.$

(*e*) যদি $\sqrt[3]{(a+\sqrt{b})}=x+\sqrt{y}$ হয়, $\sqrt[3]{(a-\sqrt{b})}=x-\sqrt{y}.$

$$\sqrt[3]{(a+\sqrt{b})}=x+\sqrt{y}$$

ঘন করিয়া, $a+\sqrt{b}=x^3+3x^2\sqrt{y}+3x.y+y\sqrt{y}$

$=(x^3+3xy)+\sqrt{y}(3x^2+y)$

$\therefore\quad a=x^3+3xy\cdots\cdots(i)$

এবং $\sqrt{b}=\sqrt{y}(3x^2+y)\cdots\cdots(ii)$

(*i*) হইতে (*ii*) বিয়োগ করিয়া, $a-\sqrt{b}=x^3+3xy-\sqrt{y}(3x^2+y)$

$=x^3-3x^2\sqrt{y}+3xyy-y\sqrt{y}$

$=(x-\sqrt{y})^3$

$\therefore\quad \sqrt[3]{(a-\sqrt{b})}=x-\sqrt{y}.$

দ্রষ্টব্য। অনুরূপে, যদি $\sqrt[3]{(a-\sqrt{b})}=x-\sqrt{y}$ হয়, $\sqrt[3]{(a+\sqrt{b})}$
$=x+\sqrt{y}.$

সাধারণভাবে, যদি $\sqrt[n]{(a+\sqrt{b})}=x+\sqrt{y}$ হয়,

$\sqrt[n]{(a-\sqrt{b})}=x-\sqrt{y}$ (n ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা হইলে)।

6. দ্বিঘাত করণীর বর্গমূল (Square root of a quadratic Surd).

দ্বিঘাত করণীর বর্গমূল বিষয়ক আলোচনা নবমশ্রেণীর পাঠ্যাংশেই করা হইয়াছে। এখানে কঠিনতর উদাহরণ দেখান হইতেছে :

দুইটি দ্বিঘাত করণীর বর্গ = একটি মূলদ রাশি + একটি করণী।

$$(\sqrt{3}+\sqrt{5})^2 = 3+5+2\sqrt{3}.\sqrt{5} = 8+2\sqrt{10}$$

তদ্রূপ, $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 = (a+b)+2\sqrt{ab}.$

অর্থাৎ $a+\sqrt{b}$ আকারের দ্বিপদ দ্বিঘাত করণীর বর্গমূলের আকার $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ এইরূপ।

উদা. 1. $a+\sqrt{b}$-এর বর্গমূল নির্ণয় কর।

মনে কর, $\sqrt{(a+\sqrt{b})} = \sqrt{x}+\sqrt{y}$

$\therefore$ বর্গ করিয়া, $a+\sqrt{b} = x+y+2\sqrt{xy}$

$\therefore \quad x+y = a \cdots (i)$ এবং $2\sqrt{xy} = \sqrt{b} \cdots (ii)$

এখন, $\quad 2\sqrt{xy} = \sqrt{b}, \quad \therefore \quad 4xy = b$

এখন, $(x+y)^2 - 4xy = a^2 - b$

বা, $(x-y)^2 = a^2-b, \quad \therefore \quad x-y = \sqrt{a^2-b} \cdots\cdots (iii)$

$\because \quad x+y = a$

এবং $x-y = \sqrt{a^2-b}$

$\therefore \quad 2x = a+\sqrt{a^2-b}, \quad \therefore \quad x = \frac{1}{2}\{a+\sqrt{a^2-b}\}$

এবং $2y = a-\sqrt{a^2-b}, \quad \therefore \quad y = \frac{1}{2}\{a-\sqrt{a^2-b}\}$

সুতরাং $\sqrt{a+\sqrt{b}} = \pm[\sqrt{\{\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}\sqrt{a^2-b}\}}+\sqrt{\{\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}\sqrt{a^2-1}\}}]$

দ্রষ্টব্য। $\sqrt{(a-\sqrt{b})} = \sqrt{x}-\sqrt{y}$-এর আকারের হইবে।

বিশিষ্ট স্থলে পর্যবেক্ষণ দ্বারাও বর্গমূল নির্ণয় করা যায়।

উদা. 2. $\frac{1}{2}(2+\sqrt{3})$-এর বর্গমূল নির্ণয় কর। [C. U. 1924]

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}(2+\sqrt{3}) &= \tfrac{1}{4}(4+2\sqrt{3})\\ &= \tfrac{1}{4}(3+1+2\sqrt{3})\\ &= \tfrac{1}{4}\{(\sqrt{3})^2+(1)^2+2.\sqrt{3}.1\}\\ &= \tfrac{1}{4}(\sqrt{3}+1)^2.\end{aligned}$$

$\therefore \quad \sqrt{\frac{1}{2}(2+\sqrt{3})} = \pm\frac{1}{2}(\sqrt{3}+1).$

উদা. 3. $11-6\sqrt{2}$-এর বর্গমূল নির্ণয় কর।

$$11-6\sqrt{2}=11-2.3.\sqrt{2}$$
$$=9+2-2.3.\sqrt{2}$$
$$=3^2+(\sqrt{2})^2-2.3.\sqrt{2}$$
$$=(3-\sqrt{2})^2$$

$\therefore \quad \sqrt{11-6\sqrt{2}}=\pm(3-\sqrt{2}).$

উদা. 4. $\sqrt{15}+\sqrt{27}$-এর বর্গমূল নির্ণয় কর।

$$\sqrt{15}+\sqrt{27}=\sqrt{3}(\sqrt{5}+3)$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}(6+2\sqrt{5})=\sqrt{\tfrac{3}{4}}(\sqrt{5}+1)^2$$

$\therefore \quad \sqrt{\sqrt{15}+\sqrt{27}}=\sqrt[4]{\tfrac{3}{4}}(\sqrt{5}+1).$

উদা. 5. $a+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}$-এর বর্গমূল নির্ণয় কর।

প্রদত্ত রাশির কোন বর্গমূল থাকিলে তাহা $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$ আকার বিশিষ্ট হইবে।

$\therefore \quad a+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}=(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})^2$

$$=x+y+z+2\sqrt{yz}+2\sqrt{zx}+2\sqrt{xy}$$

$\therefore \quad x+y+z=a$

$4yz=b$, $4zx=c$ এবং $4xy=d$ এইরূপ ধরা যাইতে পারে।$\cdots(i)$

এখন, $4yz.4zx.4xy=bcd$

বা, $64x^2y^2z^2=bcd$

$8xyz=\sqrt{bcd}\cdots\cdots(ii)$

$\dfrac{8xyz}{4yz}=\dfrac{\sqrt{bcd}}{b}$ বা, $2x=\dfrac{\sqrt{bcd}}{b}$ $\therefore \quad x=\frac{1}{2}\sqrt{\dfrac{cd}{b}}$

$\dfrac{8xyz}{4zx}=\dfrac{\sqrt{bcd}}{c}$ বা, $2y=\dfrac{\sqrt{bcd}}{c}$ $\therefore \quad y=\frac{1}{2}\sqrt{\dfrac{bd}{c}}$

$\dfrac{8xyz}{4xy}=\dfrac{\sqrt{bcd}}{d}$ বা, $2z=\dfrac{\sqrt{bcd}}{d}$ $\therefore \quad z=\frac{1}{2}\sqrt{\dfrac{bc}{d}}$

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\sqrt{\dfrac{cd}{b}}\right)}+\sqrt{\left(\frac{1}{2}\sqrt{\dfrac{bd}{c}}\right)}+\sqrt{\left(\frac{1}{2}\sqrt{\dfrac{bc}{d}}\right)}$

এইরূপ স্থলে x, y, z এর এই তিনটি মান দ্বারা $x+y+z=a$ সমীকরণটি অবশ্যই সিদ্ধ হইবে,

$$\therefore \quad \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{cd}{b}}+\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{bd}{c}}+\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{bc}{d}}=a \text{ হইবে,}$$

অর্থাৎ $bc+cd+bd=2a\sqrt{bcd}$ হইবে,......(iii)

(iii) সর্তটি সিদ্ধ না হইলে প্রদত্ত রাশির $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$ আকারের কোন বর্গমূল থাকিবে না।

উদা 6. $11+6\sqrt{2}+4\sqrt{3}+2\sqrt{6}$-এর বর্গমূল নির্ণয় কর।

এস্থলে, $a=11$

$$\sqrt{b}=6\sqrt{2}=\sqrt{72} \quad \therefore \quad b=72.$$
$$\sqrt{c}=4\sqrt{3}=\sqrt{48}, \quad \therefore \quad c=48.$$
$$\sqrt{d}=2\sqrt{6}=\sqrt{24}, \quad \therefore \quad d=24.$$

এক্ষণে, $bc+cd+db=72\times48+48\times24+24\times72=6336,$

এবং $2a\sqrt{bcd}=2\times11\times\sqrt{72.48.24}=6336.$

দেখা যাইতেছে যে পূর্ব উদাহরণের (iii) সর্তটি সিদ্ধ হইয়াছে। সুতরাং প্রদত্ত রাশির $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$ আকারের বর্গমূল আছে।

এখন ধর, $\sqrt{11+6\sqrt{2}+4\sqrt{3}+2\sqrt{6}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}.$

$$\therefore \quad 11+6\sqrt{2}+4\sqrt{3}+2\sqrt{6}=x+y+z+2\sqrt{yz}+2\sqrt{zx}+2\sqrt{xy}$$

$\therefore \quad x+y+z=11,$ এবং $4yz=72,\ 4zx=48$ এবং $4xy=24.$

$$\therefore \quad 64x^2y^2z^2=72\times48\times24.$$

$\therefore \quad xyz=36.$ [$xyz=-36$ ধরিলে অভীষ্ট ফল পাওয়া যায় না]

$\therefore \quad \dfrac{xyz}{4yz}=\dfrac{36}{72} \quad \therefore \quad x=2.$ তদ্রূপ $y=3$ এবং $z=6.$

x, y, z-এর উক্ত তিনটি মান দ্বারা $x+y+z=11$ এই সমীকরণটিও সিদ্ধ হয়,

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $=\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}.$

উদা. 7. $9+2\sqrt{6}-4\sqrt{2}-4\sqrt{3}$-এর বর্গমূল নির্ণয় কর।

এস্থলে, $a=9$

$\sqrt{b}=2\sqrt{6}, \quad \therefore \quad b=24$

$\sqrt{c}=4\sqrt{2}, \quad \therefore \quad c=32$

$\sqrt{d}=4\sqrt{3}, \quad \therefore \quad d=48.$

$\therefore \quad bc+cd+db=24\times 32+32\times 48+48\times 24=3456$

এবং $2a\sqrt{bcd}=2\times 9\times \sqrt{24\times 32\times 48}=3456.$

এখন ধর $\sqrt{9+2\sqrt{6}-4\sqrt{2}-4\sqrt{3}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{z}$

বর্গ করিয়া, $9+2\sqrt{6}-4\sqrt{2}-4\sqrt{3}$

$=x+y+z+2\sqrt{xy}-2\sqrt{xz}-2\sqrt{yz}$

$\therefore \quad x+y+z=9$ এবং $2\sqrt{xy}=2\sqrt{6},$

$-2\sqrt{xz}=-4\sqrt{2}$ এবং $-2\sqrt{yz}=-4\sqrt{3}$

$\therefore \quad xy=6, \quad xz=8, \quad yz=12$

$\therefore \quad xyz=\sqrt{6 . 8 . 12}=24$

$\therefore \quad z=4, \quad y=3, \quad x=2$

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $=\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{z}$

$=\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{4}=\sqrt{2}+\sqrt{3}-2$

কোন কোন স্থলে পরীক্ষা দ্বারা (by inspection) বর্গমূল নির্ণয় করা সহজতর হয়। উক্ত উদাহরণটি লও।

$9+2\sqrt{6}-4\sqrt{2}-4\sqrt{3}$

$=9+2.\sqrt{2}.\sqrt{3}-2.2.\sqrt{2}-2.2.\sqrt{3}$

$=(\sqrt{2})^2+(\sqrt{3})^2+(2)^2+2.\sqrt{2}.\sqrt{3}-2.2\sqrt{2}-2.2.\sqrt{3}$

লক্ষ্য কর রাশিটি $a^2+b^2+c^2+2ab-2ac-2bc$

এই আকারের যাহার বর্গমূল স্পষ্টতঃ $a+b-c$

$\therefore$ প্রদত্ত রাশির বর্গমূল $=\sqrt{2}+\sqrt{3}-2$

উদা. 8. $2x-3+2\sqrt{x^2-3x+2}$ এর বর্গমূল নির্ণয় কর।

$2x-3+2\sqrt{x^2-3x+2}$

$=(2x-3)+2\sqrt{(x-1)(x-2)}$

$=(x-1)+(x-2)+2\sqrt{x-1}\sqrt{x-2}$

$=(\sqrt{x-1})^2+(\sqrt{x-2})^2+2.\sqrt{x-1}\,.\,\sqrt{x-2}$

$=(\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2})^2$

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $=\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2}$

উদা. 9. $x+y+z+2\sqrt{zx+yz}$ এর বর্গমূল নির্ণয় কর।

$x+y+z+2\sqrt{zx+yz}$

$=x+y+z+2\sqrt{x+y}\,.\,\sqrt{z}$

$=(\sqrt{x+y})^2+(\sqrt{z})^2+2\sqrt{x+y}\,.\,\sqrt{z}$

$=(\sqrt{x+y}+\sqrt{z})^2$

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $=\sqrt{x+y}+\sqrt{z}$

প্রশ্নমালা 16

1. Find the rationalising factor of :

(*i*) $\sqrt{3}+\sqrt[3]{2}$ (*ii*) $\sqrt[3]{3}-\sqrt{2}$ (*iii*) $1-\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}$

Find the square root of :

2. $9-4\sqrt{5}$ **3.** $13-4\sqrt{10}$ **4.** $23-4\sqrt{15}$

5. $7-2\sqrt{6}$ **6.** $1+2\sqrt{x-x^2}$

7. $2a+2\sqrt{a^2-1}$ **8.** $2a-b+b\sqrt{a^2-ab}$

9. $10+\sqrt{24}-\sqrt{40}-\sqrt{60}$

10. $\frac{1}{2}(a-c)+\sqrt{ab+bc-ac-b^2}$

11. $x+\sqrt{x^2-y^2-z^2+2yz}$

12. $8+2\sqrt{2}-2\sqrt{5}-2\sqrt{10}$

13. If $x=\dfrac{\sqrt{a+2b}+\sqrt{a-2b}}{\sqrt{a+2b}-\sqrt{a-2b}}$, show that $bx^2-ax+b=10$

(C. U. 1935

14. Find the value of $\sqrt{x+\sqrt{x^2-y^2}}$.

15. Prove that :

$$\sqrt{y+\sqrt{2xy-x^2}}+\sqrt{y-\sqrt{2xy-x^2}}=\sqrt{2x}$$

16. If $x=\dfrac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}$ and $y=\dfrac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}$,

find the value of $\dfrac{x-y}{x+y}+\dfrac{x+y}{x-y}$.

17. If $x=\dfrac{\sqrt{7}+1}{\sqrt{7}-1}$ and $y=\dfrac{\sqrt{7}-1}{\sqrt{7}+1}$, find the value of $\left(\dfrac{x+y}{x-y}\right)^2$.

18. Rationalise the denominator of $\dfrac{7}{\sqrt{2}+\sqrt[4]{2}+1}$.

19. If $x=\dfrac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$ and $y=\dfrac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$, find the value of x^3+y^3.

20. If $a=2+\sqrt{3}$, prove that $a^3-2a^2-7a+2=0$.

21. If $x=\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$ and $y=\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$, prove that,

$$\frac{x^2+xy+y^2}{x^2-xy+y^2}=\frac{15}{13}$$

22. Simplify : $\dfrac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{(2+\sqrt{3})}}+\dfrac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{(2-\sqrt{3})}}$

23. If $x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, find the value of $\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$.

24. Find the square root of $\dfrac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}$,

correct to three places of decimals.

সপ্তম অধ্যায়

কল্পিত ও জটিল রাশি

(Imaginary Quantities and Complex numbers)

1. ধনাত্মক বা ঋণাত্মক সংখ্যার বর্গ সর্বদাই ধনাত্মক। সুতরাং $\sqrt{-a^2}$ এইরূপ সংখ্যার বর্গমূল $+a$ বা $-a$ এইরূপ কোন বাস্তব রাশি দ্বারা প্রকাশ করা যায় না। এই জন্য এইরূপ সংখ্যাকে **কল্পিত** (Imaginary) রাশি বলা হয়, যদিও এইরূপ সংখ্যার কোন বাস্তব সত্তা নাই। $ax^2+bx+c=0$ এই সমীকরণের বীজে $\sqrt{b^2-4ac}$ এই অংশে $4ac>b^2$ হইলে $\sqrt{b^2-4ac}$ দ্বারা একটি ঋণাত্মক সংখ্যার বর্গমূল সূচিত হইতেছে। এই জাতীয় সংখ্যাও গণিত শাস্ত্রের এক শ্রেণীর সংখ্যা। সুতরাং ইহাদের প্রক্রিয়া ও ব্যবহার সম্বন্ধে কিছু আলোচনা প্রয়োজন। বীজগণিতের মৌলিক নিয়মগুলি এই জাতীয় সংখ্যা সম্বন্ধেও প্রযোজ্য।

$\sqrt{a}$ এমন একটি সংখ্যা যাহার বর্গ অর্থাৎ $(\sqrt{a})^2=a$,

তদ্রূপ, $\sqrt{-a}$ এমন একটি সংখ্যা যাহার বর্গ অর্থাৎ $(\sqrt{-a})^2=\sqrt{-a}\times\sqrt{-a}$
$-a$

অনুরূপ ভাবে, $(\sqrt{-1})^2=\sqrt{-1}\times\sqrt{-1}=-1$

$\sqrt{-1},\ \sqrt{-2},\ \sqrt{-x^2},\ \sqrt{-x^4}$ প্রভৃতি কল্পিত রাশি ;

$\sqrt[4]{-1},\ \sqrt[4]{-2},\ \sqrt[6]{-3},\ \sqrt[6]{-7}$ প্রভৃতিও কল্পিত রাশি।

$\sqrt{-1}$ একটি কল্পিত রাশি এবং ইহাকে 'i' প্রতীক দ্বারা সূচিত করা হয়।

$\sqrt{-1}\times\sqrt{-1}=(\sqrt{-1})^2=-1$

$$\therefore\quad (i)^2=-1$$

যে কোন কল্পিত রাশিকে একটি বাস্তব ও একটি কল্পিত রাশির গুণফলরূপে প্রকাশ করা যায় ;

$\sqrt{-5}=\sqrt{-1\times5}=\sqrt{-1}\,.\,\sqrt{5}=i\sqrt{5}$

$\sqrt{-a}=\sqrt{-1\times a}=\sqrt{-1}\sqrt{a}=i\sqrt{a}$

2. i-এর ঘাত। (powers of i)

$$i^2 = -1,\ i^3 = i^2 . i = (-1).i = -i,\quad i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1$$

সুতরাং সাধারণ ভাবে, n ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা হইলে,

$$i^{4n} = (i^4)^n = 1^n = 1$$
$$i^{4n+1} = (i^{4n}) . i = i$$
$$i^{4n+2} = i^{4n} . i^2 = 1 \times (-1) = -1$$
$$i^{4n+3} = i^{4n} . i^3 = -i$$

সুতরাং i-এর ধনাত্মক অখণ্ড ঘাত দ্বারা ± 1 এবং $\pm i$ এই চারিটি মান উৎপন্ন হয়।

আবার, $$i^{-1} = \frac{1}{i} = \frac{-i^2}{i} = -i$$

$$i^{-2} = \frac{1}{i^2} = \frac{1}{-1} = -1$$
$$i^{-3} = i^{-2} . i^{-1} = -1 \times (-i) = i$$
$$i^{-4} = (i^{-2})^2 = (-1)^2 = 1$$

সুতরাং i-এর ঋণাত্মক অখণ্ড ঘাত দ্বারা ± 1 এবং $\pm i$ এই চারিটি মান উৎপন্ন হয়।

3. জটিল রাশি (Complex Numbers)

a এবং b বাস্তব রাশি হইলে $a+ib$ এই আকারের রাশিকে **কল্পিত রাশিমালা** বা **জটিল রাশিমালা** (Imaginary Expression or Complex number) বলা হয়। এই রাশিমালার এক অংশ (a) বাস্তব এবং অপর অংশ (ib) কল্পিত।

$3+2\sqrt{-1},\ a \pm ib,\ 5+\sqrt{-7}$ ইত্যাদি জটিল রাশি।

একই পদ বিশিষ্ট দুইটি জটিল রাশির কল্পিত অংশের চিহ্ন বিপরীত হইলে, উহাদিগকে পরস্পর **বিপরীত জটিল** রাশি (Conjugate Complex quantities) বলা হয় ; $a+ib,\ a-ib$ পরস্পর বিপরীত জটিল রাশি।

4. কল্পিত রাশি ও বীজগণিতের মৌলিক প্রক্রিয়া।

বীজগণিতের সাধারণ মৌলিক প্রক্রিয়া কল্পিত রাশি সম্বন্ধেও প্রয়োজ্য

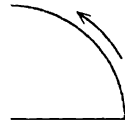
(i) $7i+3i=10i.$ (ii) $7i-3i=4i.$

(iii) $7i \times 3i=21i^2=21 \times -1=-21.$

(iv) $7i \div 3i=\frac{7i}{3i}=\frac{7}{3}.$

5. কল্পিত ও জটিল রাশির ব্যাখ্যা।

(a) $\sqrt{-1}$ এর নূতন ব্যাখ্যা।

XX' সরলরেখায় O বিন্দুর ডান দিকে OA-কে ধনাত্মক ধরা হইলে, বাম দিকে OA এর সমান OA' কে ঋণাত্মক ধরা যাইতে পারে। অর্থাৎ OA এর দৈর্ঘ্যমান যত হইবে, OA'-এর দৈর্ঘ্যমানও তত হইবে, কিন্তু দৈর্ঘ্যমান '−' চিহ্নযুক্ত হইবে।

সুতরাং '−1' দ্বারা গুণ করিলে কল্পিত OA দৈর্ঘ্য OX অবস্থান হইতে দুই সমকোণ অতিক্রম করিয়া OX'-এর উপর OA' অবস্থানে উপনীত হইবে, এইরূপ মনে করা যাইতে পারে।

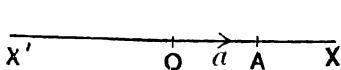
এখন, $\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1}=-1$

সুতরাং $\sqrt{-1}$ এমন একটি প্রক্রিয়া যাহা দ্বারা কোন নির্দিষ্ট দৈর্ঘ্য এক সমকোণ অতিক্রম করে, কারণ আর এক সমকোণ, অর্থাৎ মোট দুই সমকোণ অতিক্রম করিলে উহা '−1' দ্বারা সূচিত হইবে।

অতএব এইরূপ চারি বার ঘুরিয়া চারি সমকোণ অতিক্রম করিয়া উহা প্রথম অবস্থানে ফিরিয়া আসিবে।

$\therefore \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1}=(\sqrt{-1})^4=1$

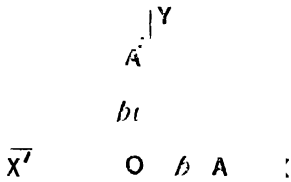
(b) জটিল রাশির জ্যামিতিক ব্যাখ্যা (Geometrical Representation of Complex Numbers)

XOX' সরল রেখার উপর আমরা যে কোন বাস্তব সংখ্যা (real number) কোন নির্দিষ্ট দৈর্ঘ্য দ্বারা চিহ্নিত করিতে পারি। বাস্তব সংখ্যা a ধনাত্মক হইলে, যদি

X′ O a A X

আমরা OX-এর দিকে উহাকে OA দ্বারা সূচিত করি, তাহা হইলে, OX'-এর দিকে অনুরূপ দৈর্ঘ্য দ্বারা আমরা ঋণাত্মক a-কে সূচিত করিতে পারি।

$\sqrt{-1}$-এর পূর্ব ব্যাখ্যা অনুসারে, আমরা $\sqrt{-1}$ কেও জ্যামিতিক প্রণালীতে প্রদর্শন করাইতে পারি।

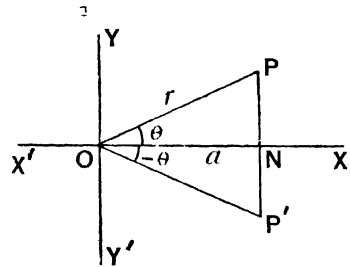
$b\sqrt{-1}$ বা bi একটি কল্পিত (imaginary) সংখ্যা।

Y
A'
bi
X' O b A X

XOX' এবং YOY' দুইটি সরলরেখা লও যাহারা পরস্পর O-বিন্দুতে লম্বভাবে ছেদ করে।

এখন, OX এর উপর $OA=b$ লও এবং OA-কে তীর প্রদর্শিতক্রমে ঘুরাও যে পর্যন্ত না উহা এক সমকোণ অতিক্রম করে। এক সমকোণ অতিক্রম করিলে OA অবশ্যই OA' অবস্থানে আসিয়া OY-এর সহিত মিলিত হইবে।

এখন, $\sqrt{-1}$ এর অর্থ এক সমকোণ পরিমাণ ঘূর্ণন, সুতরাং $b\sqrt{-1}$ বা bi OA' দ্বারা সূচিত হইবে।

এখন, General Imaginary বা Complex quantity $a+bi$ লও। XOX এবং YOY' সরলরেখা দুইটি O-বিন্দুতে পরস্পর লম্বভাবে ছেদ করিয়াছে।

এখন, OX হইতে $ON=a$ লও এবং OX-এর উপর NP লম্ব $=b$ লও।

তাহা হইলে, $NP=bi$ হইবে। চিত্র হইতে দেখা যায়, আমরা P-বিন্দুতে পৌঁছিব এবং উহাই $a+bi$ এই Complex numberটি সূচিত করিবে।

সুতরাং, কোন সমতলে XOX' এবং YOY' দুইটি অক্ষ লইয়া (a, b) বিন্দুটি স্থাপন করিলে উহার ভুজদ্বারা complex number এর বাস্তব অংশটি এবং কোটি দ্বারা অবাস্তব অংশ সূচিত হইবে।

Argand Diagram.

পূর্বোক্ত XOX' এবং YOY' অক্ষ চিহ্নিত সমতলে $P(a, b)$ বিন্দুটি দ্বারা $a+bi$ জটিল সংখ্যাটি (Complex number) সূচিত হয়। পূর্ব চিত্রে $OP=r$ এবং XOP কোণটিকে θ ধরিলে,

$r=\sqrt{a^2+b^2}$ ইহাকে $a+bi$ Complex সংখ্যার **Modulus** বলা হয় এবং কোণটিকে **Argument** বলা হয়।

$a+bi$ এর অনুবন্ধী জটিল সংখ্যা (Conjugate complex number), $(a-bi)$ জটিল সংখ্যাটি $P'(a, -b)$ দ্বারা সূচিত হয়। ইহার Modulus $OP'=OP$ $=\sqrt{a^2+b^2}=(a+bi)$ এর Modulus এবং ইহার Argument $=-\theta$.

6. জটিল রাশির ধর্ম (Properties of Complex Quantities)

(*i*) If $a+bi=0$, then, $a=0$, $b=0$.

$a+ib=0, \quad \therefore \quad a=-ib$

$\therefore$ বর্গ করিয়া, $a^2=-b^2 \quad \therefore \quad a^2+b^2=0$

এখন, a^2, b^2 উভয়ই ধনাত্মক, সুতরাং উহাদের প্রত্যেকটি শূন্য না হইলে, উহাদের সমষ্টি শূন্য হইতে পারে না।

সুতরাং $a=0$ এবং $b=0$.

(*ii*) If $a+ib=c+id$ then $a=c$ এবং $b=d$

$a+ib=c+id$

$\therefore \quad a-c=(id-ib)=-i(b-d)$

বর্গ করিয়া, $(a-c)^2=-(b-d)^2$

$\therefore \quad (a-c)^2+(b-d)^2=0$

$(a-c)^2$, $(b-d)^2$ উভয়ই ধনাত্মক ; সুতরাং উহাদেব প্রত্যেকেই শূন্য না হইলে, উহাদের সমষ্টি শূন্য হইতে পারে না,

সুতরাং $(a-c)^2=0$, বা $a-c=0 \quad \therefore \quad a=c$

এবং $(b-d)^2=0$ বা $b-d=0 \quad \therefore \quad b=d$

(*iii*) The sum and product of two conjugate complex numbers are real. দুইটি বিপরীত বা অনুবন্ধী জটিল রাশির যোগফল এবং গুণফল উভয়ই বাস্তব।

$$(a+ib)+(a-ib)=2a \text{ (বাস্তব)}$$

$$(a+ib)(a-ib)=a^2-i^2b^2=a^2+b^2 \text{ (বাস্তব)}$$

(*iv*) The sum and difference of two complex numbers are complex numbers. দুইটি জটিল রাশির সমষ্টি ও অন্তর দ্বারা জটিল রাশি উৎপন্ন হয়।

$$(a+ib)\pm(c+id)=(a\pm c)+i(b\pm d)=A+iB \text{ (আকারের জটিল রাশি)}$$

(*v*) The product of two or more complex numbers is a complex number. দুই বা ততোধিক জটিল রাশির গুণফল একটি জটিল রাশি।

$$(a+ib)(c+id)=ac+aid+cib+ib\,.\,id$$
$$=(ac-bd)+i(ad+bc) \quad [\because \quad i^2=-1]$$
$$=A+iB \text{ (আকারের জটিল রাশি)}$$

দুই-এর অধিক জটিল রাশির গুণফলও $A+iB$ আকারের জটিল রাশি হইবে।

(*vi*) The quotient of two complex numbers is a complex number. দুইটি জটিল রাশির ভাগফল একটি জটিল রাশি।

$$\frac{a+ib}{c+id}=\frac{(a+ib)(c-id)}{(c+id)(c-id)}=\frac{ac-aid+ibc-ib\,.\,id}{c^2-i^2d^2}$$
$$=\frac{(ac+bd)+i(bc-ad)}{c^2+d^2}$$
$$=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{i(bc-ad)}{c^2+d^2}$$
$$=A+iB \text{ আকারের জটিল রাশি।}$$

(*vii*) Any positive integral power of a complex number is a complex number. কোন জটিল রাশির অখণ্ড ধনাত্মক ঘাত দ্বারা একটি জটিল রাশি উৎপন্ন হয়।

$$(a+ib)^2=a^2+i^2b^2+2a\,.\,ib$$
$$=(a^2-b^2)+2abi=A+iB \text{ আকারের জটিল রাশি।}$$

$$(a+ib)^3 = a^3 + 3a^2 \cdot ib + 3a \cdot i^2b^2 + i^3b^3$$
$$= a^3 + 3a^2ib - 3ab^2 - ib^3$$
$$= (a^3 - 3ab^2) + i(3a^2b - b^3)$$
$= A + iB$ আকারের জটিল রাশি।

($viii$) Any root of a complex number is a complex number. জটিল রাশির যে কোন মূল একটি জটিল রাশি।

ধর, $\sqrt[n]{a+ib} = x$

$\therefore \quad (a+ib)^{\frac{1}{n}} = x$

$\therefore \quad a+ib = x^n$

এখন, x বাস্তব রাশি হইলে x^n একটি বাস্তব রাশি হইবে, তাহা হইলে, $a = x^n$ এবং $b = 0$; কিন্তু $b = 0$ হইলে $a+ib$ আর জটিল রাশি থাকিবে না, ইহা কল্পনা বিরুদ্ধ। সুতরাং x অর্থাৎ $\sqrt[n]{a+ib}$ একটি জটিল রাশি।

7. $(a+ib)$-এর বর্গমূল (Square root of $a+ib$)

জটিল রাশির যে কোন মূল একটি জটিল রাশি, সুতরাং

ধর, $\sqrt{a+ib} = x+iy$ (x এবং y বাস্তব)

$\therefore \quad a+ib = (x+iy)^2$
$$= x^2 - y^2 + 2ixy$$

$\therefore \; x^2 - y^2 = a \qquad \cdots$

এবং $\quad 2xiy = ib$

অর্থাৎ $\quad 2xy = b \qquad \cdots (ii)$

এখন, $(x^2+y^2)^2 = (x^2-y^2)^2 + 4x^2y^2$
$$= a^2 + b^2$$

$\therefore \quad x^2 + y^2 = \sqrt{a^2+b^2}$

(i) এবং (iii) হইতে, $2x^2 = a + \sqrt{a^2+b^2}$

$\therefore \quad x^2 = \frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2+b^2})$,

$\therefore \quad x = \pm\left\{\frac{1}{2}(\sqrt{a^2+b^2}+a)\right\}^{\frac{1}{2}}$

এবং $\quad 2y^2 = \sqrt{a^2+b^2} - a$

$\therefore \quad y^2 = \frac{1}{2}(\sqrt{a^2+b^2} - a)$

$\therefore \quad y = \pm\left\{\frac{1}{2}(\sqrt{a^2+b^2} - a)\right\}^{\frac{1}{2}}$

এখন (ii) হইতে দেখা যায় যে b-এর যে চিহ্ন (ধনাত্মক বা ঋণাত্মক), xy-এরও সেই চিহ্ন হইবে।

সুতরাং b ধনাত্মক হইলে x, y উভয়ই ধনাত্মক বা উভয়ই ঋণাত্মক।

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $= \pm[\{\frac{1}{2}(\sqrt{a^2+b^2}+a)\}^{\frac{1}{2}} + i\{\frac{1}{2}(\sqrt{a^2+b^2}-a)\}^{\frac{1}{2}}]\cdots(1$

আবার b ঋণাত্মক হইলে x, y পরস্পর বিপরীত চিহ্নযুক্ত হইবে,

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $= \pm[\{\frac{1}{2}(\sqrt{a^2+b^2}+a)\}^{\frac{1}{2}} - i\{\frac{1}{2}(\sqrt{a^2+b^2}-a)\}^{\frac{1}{2}}]$

উদা. 1. $3+4i$-এর বর্গমূল নির্ণয় কর।

ধর, $\sqrt{3+4i} = x+iy$

$\therefore \quad 3+4i = x^2 - y^2 + 2ixy$

$\therefore \quad x^2 - y^2 = 3\cdots(i)$

এ $\quad 2xy = 4$ বা $xy = 2\cdots(ii)$

এখন, $(x^2+y^2)^2 = (x^2-y^2)^2 + 4x^2y^2 = 9+16 = 25$

$\therefore \quad x^2+y^2 = 5 \quad (iii)$

(i) এবং (iii) হইতে, $\left.\begin{array}{l} x^2+y^2=5 \\ x^2-y^2=3 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x=\pm 2 \\ y=\pm 1. \end{array}$

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $= \pm(2+i)$.

উদা. 2. i এবং $-i$-এর বর্গমূল নির্ণয় কর।

$(i) \quad i = \frac{1}{2}(1+2i-1) = \frac{1}{2}(1+2i+i^2)$
$= \frac{1}{2}(1+i)^2$

$\therefore \quad \sqrt{i} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$

$(ii) \quad -i = \frac{1}{2}(1-2i-1) = \frac{1}{2}(1-2i+i^2)$
$= \frac{1}{2}(1-i)^2$

$\sqrt{-i} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)$.

উদা. 3. $\dfrac{5+12i}{3-4i}$-কে $A+iB$ আকারে প্রকাশ কর।

$$\frac{5+12i}{3-4i}=\frac{5+12i}{3-4i}\times\frac{3+4i}{3+4i}=\frac{15+56i-48}{3^2-(4i)^2}=\frac{-33+56i}{25}$$

$$=-\frac{33}{25}+\frac{56i}{25}$$

($A+iB$ আকারের জটিল রাশি)

উদা. 4. $2x+(x^2-1)i$-এর বর্গমূল নির্ণয় কর।

ধর, $\sqrt{2x+(x^2-1)i}=a+ib$

$\therefore\ 2x+(x^2-1)i=a^2-b^2+2iab$

$\therefore\ a^2-b^2=2x$ এবং $2ab=(x^2-1)$

$\therefore\ (a^2+b^2)^2=(a^2-b^2)^2+4a^2b^2$

$=4x^2+(x^2-1)^2=4x^2+x^4-2x^2+1$

$=x^4+2x^2+1=(x^2+1)^2$

$\therefore\ a^2+b^2=x^2+1$

এবং $a^2-b^2=2x$

$\therefore\ 2a^2=x^2+2x+1=(x+1)^2$

a^2 $(x+1)^2$ $\quad a=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(x+1)$

এবং $2b^2=x^2-2x+1=(x-1)^2$

$b^2=\frac{(x-1)^2}{2}$, $\quad \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(x-1)$

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\{(x+1)+(x-1)i\}$.

8. জটিল রাশির মডিউলাস্ (Modulus of a complex num

a^2+b^2-এর ধনাত্মক বর্গমূল অর্থাৎ $\sqrt{a^2+b^2}$-কে $a+ib$ এবং a ... মডিউলাস বলা হয়।

$5+3i$ এবং $5-3i$-এর মডিউলাস $=\sqrt{5^2+3^2}=\sqrt{34}$

$3+4i$ এবং $3-4i$-এর মডিউলাস $=\sqrt{3^2+4^2}=5$

$12+5i$ এবং $12-5i$-এর মডিউলাস $=\sqrt{12^2+5^2}=13$.

$a+ib$-এর মডিউলাসকে সংক্ষেপে mod. $(a+ib)$ লেখা হয়।

mod. $(a+ib)=+\sqrt{a^2+b^2}$

9. মডিউলাসের ধর্ম (Properties of the Modulus).

(1) একটি জটিল রাশি এবং উহার বিপরীত (conjugate) জটিল রাশির মডিউলাস অভিন্ন।

$$\text{mod. }(a-ib) = +\sqrt{a^2+(-b)^2} = +\sqrt{a^2+b^2}$$
$$= \text{mod. }(a+ib)$$

(*ii*) দুইটি জটিল রাশির গুণফলের মডিউলাস উহাদের মডিউলাস দুইটির গুণফলের সমান।

মনে কর, $a+ib$ এবং $c+id$ দুইটি জটিল রাশি,

$\therefore\quad (a+ib)(c+id) = (ac-bd)+i(bc+ad)$

$\therefore$ উক্ত গুণফলের মডিউলাস $= \sqrt{(ac-bd)^2+(bc+ad)^2}$

$$= \sqrt{a^2c^2+b^2d^2+b^2c^2+a^2d^2}$$
$$= \sqrt{a^2(c^2+d^2)+b^2(c^2+d^2)}$$
$$= \sqrt{(a^2+b^2)\times(c^2+d^2)}$$
$$= \sqrt{a^2+b^2}.\ \sqrt{c^2+d^2}$$
$$= \text{mod. }(a+ib)\times\text{mod. }(c+id).$$

(*iii*) দুইটি জটিল রাশির ভাগফলের মডিউলাস, রাশিদ্বয়ের মডিউলাসের ভাগফলের সমান।

মনে কর, $a+ib$ এবং $c+id$ দুইটি জটিল রাশি,

এখন, $$\frac{a+ib}{c+id} = \frac{a+ib}{c+id}\times\frac{c-id}{c-id} = \frac{(ac+bd)+i(bc-ad)}{c^2+d^2}$$
$$= \frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{i(bc-ad)}{c^2+d^2}$$

উক্ত ভাগফলের মডিউলাস $= \sqrt{\left\{\left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2}\right)^2+\left(\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)^2\right\}}$

$$= \sqrt{\left\{\frac{a^2c^2+b^2d^2+b^2c^2+a^2d^2}{(c^2+d^2)^2}\right\}}$$
$$= \sqrt{\left\{\frac{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}{(c^2+d^2)^2}\right\}} = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{c^2+d^2}}$$
$$\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{c^2+d^2}} = \frac{\text{mod. }(a+ib)}{\text{mod. }(c+id)}$$

10. এককের ঘনমূল (Cube roots of unity).

এককের ঘনমূলের অর্থ 1-এর ঘনমূল $=\sqrt[3]{1}$.

ধর, $x=\sqrt[3]{1}$

$\therefore\quad x^3=1$

বা, $x^3-1=0$

বা, $(x-1)(x^2+x+1)=0$

সুতরাং $x-1=0,\quad \therefore\ x=1$

অথবা, $x^2+x+1=0$

সমাধান করিয়া, $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}$

$\therefore\quad \sqrt[3]{1}=1$ (বাস্তব)......(1)

$\sqrt[3]{1}=\frac{1}{2}(-1+\sqrt{-3})$ [কল্পিত, imaginary]...(2)

$\sqrt[3]{1}=\frac{1}{2}(-1-\sqrt{-3})$ [কল্পিত, imaginary]...(3)

11. এককের ঘনমূলের ধর্ম (Properties of the cube roots of unity).

(*i*) এককের তিনটি ঘনমূলের সমষ্টি শূন্য।

1-এর তিনটি ঘনমূলের সমষ্টি

$=1+\frac{1}{2}(-1+\sqrt{-3})+\frac{1}{2}(-1-\sqrt{-3})$

$=1-\frac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{-3}}{2}-\frac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{-3}}{1}=0.$

(*ii*) এককের কল্পিত (imaginary) দুইটি ঘনমূলের গুণফল

$\frac{1}{2}(-1+\sqrt{-3})\times\frac{1}{2}(-1-\sqrt{-3})$

$=\frac{1}{4}\times\{(-1)^2-(\sqrt{-3})^2\}$

$=\frac{1}{4}\times(1+3)=\frac{1}{4}\times 4=1.$

দ্রষ্টব্য। এককের কল্পিত দুইটি ঘনমূলের গুণফল 1 ; সুতরাং উহাদের একটি অপরটির অন্যোন্যক বা বিপরীত (reciprocal).

(*iii*) এককের কল্পিত ঘনমূল দুইটির প্রত্যেকটি অপরটির বর্গ।

$\{\frac{1}{2}(-1+\sqrt{-3})\}^2=\frac{1}{4}(1-3-2\sqrt{-3})=\frac{1}{2}(-1-\sqrt{-3})$

$\{\frac{1}{2}(-1-\sqrt{-3})\}^2=\frac{1}{4}(1-3+2\sqrt{-3})=\frac{1}{2}(-1+\sqrt{-3})$

1-এর কল্পিত ঘনমূল দুইটির একটি অপরটির বর্গ ; সুতরাং উহাদের একটিকে w দ্বারা সূচিত করিলে অপরটিকে w^2 দ্বারা সূচিত করা যায়। 1-এর তিনটি ঘনমূল সাধারণতঃ $1, w, w^2$ দ্বারা সূচিত করা হয়।

সুতরাং পূর্বোক্ত আলোচনা হইতে,

(*a*) $1+w+w^2=0$ — 11. (*i*) অনুসারে।

(*b*) $w \cdot w^2$ (অর্থাৎ w^3) $=1$ — 11. (*ii*) অনুসারে।

12. w-এর ঘাত (Powers of w)

w-এর যে কোন অখণ্ড ধনাত্মক ঘাত 1, w বা w^2 এর সমান।

$\because \quad w^3=1,$

$\therefore \quad w^4=w^3 \cdot w=1 \cdot w=w$

$w^5=w^3 \cdot w^2=1 \cdot w^2=w^2$

$w^6=w^3 \cdot w^3=1 \cdot 1=1$

$w^7=w^6 \cdot w=1 \cdot w=w$

$w^8=w^6 \cdot w^2=1 \cdot w^2=w^2$

এখন, n কোন অখণ্ড ধনাত্মক সংখ্যা হইলে,

এবং $n=3p$ (p একটি অখণ্ড সংখ্যা) হইলে,

$w^n=w^{3p}=(w^3)^p=1^p=1$

$n=3p+1$ হইলে

$w^{3p+1}=(w^{3p}) \cdot w=1 \cdot w=w$

$n=3p+2$ হইলে,

$w^{3p+2}=(w^{3p}) \cdot w^2=1 \cdot w^2=w^2$

সুতরাং সাধারণ ভাবে,

$w^n=1$ অথবা w অথবা w^2 হইবে,

যখন, n-কে 3 দ্বারা ভাগ করিলে ভাগশেষ 0, 1, অথবা 2 থাকিবে।

উদা. 5. প্রমাণ কর যে,

(i) $(wa+w^2b)(w^2a+wb)=a^2-ab+b^2$ [C. U. 1929]

(ii) $(a-wb)(a-w^2b)=a^2+ab+b^2$

(iii) $(a+wb+w^2c)(a+w^2b+wc)=a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab$

$\because\ w+w^2=-1,\ w^2+w^4=w^2+w=-1,\ w^3=1$

(i) $(wa+w^2b)(w^2a+wb)=w^3a^2+(w^2+w^4)ab+w^3b^2$
$=a^2-ab+b^2$

(ii) $(a-wb)(a-w^2b)=a^2-(w+w^2)ab+w^3b^2$
$=a^2+ab+b^2$

(iii) $(a+wb+w^2c)(a+w^2b+wc)$
$=a^2+b^2w^3+c^2w^3+abw+abw^2+bcw^2+bcw^4+caw+caw^2$
$=a^2+b^2w^3+c^2w^3+ab(w+w^2)+bc(w^2+w^4)+ca(w+w^2)$
$=a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$

উদা. 6. $a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab$ এর উৎপাদক নির্ণয় কর।
[C. U. 1930]

$a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab$
$=a^2+b^2w^3+c^2w^3+ab(w+w^2)+bc(w^4+w^2)+ca(w+w^2)$
$=(a^2+abw^2+acw)+(abw+b^2w^3+bcw^2)+(acw^2$
$+bcw^4+c^2w^3)$
$=a(a+bw^2+cw)+wb(a+bw^2+cw)+w^2c(a+bw^2+cw)$
$=(a+bw^2+cw)(a+bw+cw^2)$

উদা. 7. প্রমাণ কর যে $(1-w)(1-w^2)(1-w^4)(1-w^8)=9$
[P. U. 1946]

বাম পক্ষ $=(1-w)(1-w^2)(1-w\,.\,w^3)(1-w^2\,.\,w^6)$
$=(1-w)(1-w^2)(1-w)(1-w^2)$
$[\because\ w^6=(w^3)^2=1^2=1]$
$=(1-w)^2(1-w^2)^2=\{(1-w)(1-w^2)\}^2$
$=(1-w-w^2+w^3)^2$
$=\{1-(w+w^2)+w^3\}^2$
$=\{1+1+1\}^2=3^2=9$

ঘূর্ণ্যমান সরলরেখা তৃতীয়পাদে OC অবস্থানে আসিয়া OX-এর সহিত XOC কোণ উৎপন্ন করিলে, OC-এর উপরে যে কোন R বিন্দু লইয়া OX′-এর উপর RK লম্ব টানিলে, OK এবং RK উভয়ই ঋণাত্মক হইবে। সুতরাং XOC কোণের পরিমাণ γ (gamma) হইলে, tan γ ও cot γ ধনাত্মক হইবে এবং sin γ, cos γ, sec γ ও cosec γ ঋণাত্মক হইবে।

ঘূর্ণ্যমান সরলরেখা চতুর্থপাদে OD অবস্থানে আসিয়া OX-এর সহিত XOD কোণ উৎপন্ন করিলে, OD-র উপর যে কোনও S বিন্দু লইয়া OX-এর উপর SL লম্ব টানিলে OL ধনাত্মক এবং SL ঋণাত্মক হইবে। সুতরাং XOD কোণের পরিমাণ δ (delta) হইলে, cos δ ও sec δ ধনাত্মক হইবে এবং sin δ, tan δ, cot δ ও cosec δ ঋণাত্মক হইবে।

সুতরাং দেখা গেল প্রথম পাদে যে কোন কোণের সমস্ত ত্রিকোণমিতিক অনুপাত ধনাত্মক; দ্বিতীয় পাদে sine ও cosecant ধনাত্মক, অবশিষ্ট চারিটি অনুপাত ঋণাত্মক; তৃতীয় পাদে tangent ও cotangent ধনাত্মক, অবশিষ্ট চারিটি অনুপাত ঋণাত্মক; চতুর্থ পাদে cosine ও secant ধনাত্মক, অবশিষ্ট চারিটি অনুপাত ঋণাত্মক।

দ্রষ্টব্য ঃ—All, sin, tan, cos এই চারিটি স্মরণ রাখিতে পারিলেই বিভিন্ন পাদে অবস্থিত কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত-সমূহের কোন্‌টি ধনাত্মক এবং কোন্‌টি ঋণাত্মক নির্ণয় করা সহজ হইবে। প্রথম পাদে অবস্থিত কোণের সমস্ত ত্রিকোণমিতিক অনুপাত ধনাত্মক। দ্বিতীয় পাদে অবস্থিত কোণের sin এবং উহার বিপরীত cosec ধনাত্মক এবং অবশিষ্ট চারিটি ঋণাত্মক। তৃতীয় পাদে অবস্থিত কোণের tan ও উহার বিপরীত cot ধনাত্মক এবং অবশিষ্ট চারিটি ঋণাত্মক; চতুর্থ পাদে অবস্থিত কোণের cos ও উহার বিপরীত sec ধনাত্মক এবং অবশিষ্ট চারিটি ঋণাত্মক।

SIN & COSEC + ALL +

X′ O X

TAN & COT + COS & SEC +

৩. নবম শ্রেণীর পাঠ্যাংশে ধনাত্মক ও ঋণাত্মক কোণের বিষয় আলোচনা করা হইয়াছে। কোন সরলরেখা কোন নির্দিষ্ট অবস্থান হইতে ঘুরিতে আরম্ভ করিয়া

ঘড়ির কাঁটা যে দিকে ঘোরে উহার বিপরীত দিকে (Anti-clockwise) ঘুরিয়া যে কোণ উৎপন্ন করে তাহাকে **ধনাত্মক কোণ** (Positive angle) এবং ঘড়ির কাঁটা যে দিকে ঘোরে সেই দিকে (clockwise) ঘুরিয়া যে কোণ উৎপন্ন করে তাহাকে **ঋণাত্মক কোণ** (Negative angle) বলে। সুতরাং কোন কোণের পরিমাণ 0° ও -90°-র মধ্যে হইলে উহা চতুর্থ পাদে, -90° ও -180°-র মধ্যে হইলে উহা তৃতীয় পাদে, -180° ও -270°-র মধ্যে হইলে উহা দ্বিতীয় পাদে এবং -270° ও -360°-র মধ্যে হইলে উহা প্রথম পাদে অবস্থিত হইবে।

4. 0°, 90°, 180°, 270° ও 360° পরিমিত কোণসমূহকে অর্থাৎ যে সকল কোণের বাহুদ্বয় একই অক্ষ বা অক্ষদ্বয়ের সহিত মিলিত হইয়া যায় তাহাদিগকে **কোয়াড্রাণ্টল কোণ** (Quadrantal angle) বলে।

কোন কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত নির্ণয় করিতে হইলে একটি সমকোণী ত্রিভুজ অঙ্কনের প্রয়োজন হয়। কোয়াড্রাণ্টল কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত নির্ণয়ের ত্রিভুজ একটি সরলরেখায় পরিণত হইয়া যায়।

প্রশ্নমালা 1

Determine the quadrant in which θ lies, when

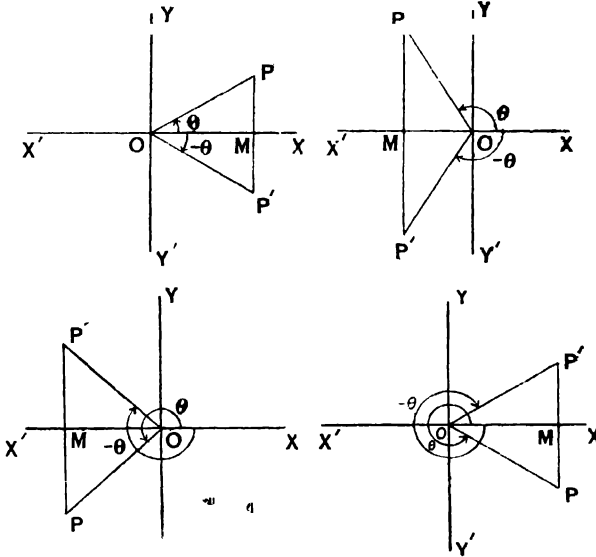
(*i*)	sin θ is positive	(*ii*)	sin θ is negative
(*iii*)	cos θ positive	(*iv*)	cos θ negative
(*v*)	tan θ positive	(*vi*)	tan θ negative
(*vii*)	cot θ positive	(*viii*)	cot θ negative
(*ix*)	sec θ positive	(*x*)	sec θ negative
(*xi*)	cosec θ positive	(*xii*)	cosec θ negative.

দ্বিতীয় অধ্যায়

নির্দিষ্ট কোণ সংযুক্ত কোণসমূহের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

(Trigonometrical ratios of angles associated with a given angle)

1. $-\theta$ কোণের এবং θ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের সম্পর্ক।

মনে কর ঘূর্ণ্যমান OP সরলরেখা OX-এর সহিত XOP ($=\theta$) কোণ উৎপন্ন করে। P হইতে XX′-এর উপর PM লম্ব টান। PM-কে বর্দ্ধিত করিয়া বর্দ্ধিতাংশ হইতে PM-এর সমান MP′ কাটিয়া লও। OP′ যুক্ত কর। POM ও P′OM ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম (কারণ PM = P′M, OM সাধারণ এবং $\angle$PMO = $\angle$P′MO, সমকোণ বলিয়া)

$\therefore$ OP = OP′ এবং $\angle$POM = $\angle$P′OM

$\therefore$ $\angle$XOP = $\angle$XOP′ ; কিন্তু কোণ দুইটির মধ্যে $\angle$XOP ঘড়ির কাঁটা যে দিকে ঘোরে উহার বিপরীত দিকে ঘুরিয়া উৎপন্ন হইয়াছে বলিয়া ধনাত্মক এবং

$\angle XOP'$ ঘড়ির কাঁটা যে দিকে ঘোরে সেই দিকে ঘুরিয়া উৎপন্ন হইয়াছে বলিয়া ঋণাত্মক। $\therefore$ $\angle XOP$-এর পরিমাণ θ হইলে $\angle XOP'$ এর পরিমাণ হইবে $-\theta$.

আবার PM ধনাত্মক হইলে P′M ঋণাত্মক অর্থাৎ $P'M = -PM$.

$$\therefore \quad \sin(-\theta) = \frac{P'M}{OP'} = \frac{-PM}{OP} = -\sin\theta$$

$$\cos(-\theta) = \frac{OM}{OP'} = \frac{OM}{OP} = \cos\theta$$

$$\tan(-\theta) = \frac{P'M}{OM} = \frac{-PM}{OM} = -\tan\theta$$

$$\cot(-\theta) = \frac{OM}{P'M} = \frac{OM}{-PM} = -\cot\theta$$

$$\sec(-\theta) = \frac{OP'}{OM} = \frac{OP}{OM} = \sec\theta$$

$$\operatorname{cosec}(-\theta) = \frac{OP'}{P'M} = \frac{OP}{-PM} = -\operatorname{cosec}\theta.$$

উদাহরণ। $\sin(-30°) = -\sin 30° = -\frac{1}{2}$;

$\cos(-30°) = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

$\tan(-45°) = -\tan 45° = -1$;

$\cot(-45°) = -\cot 45° = -1$;

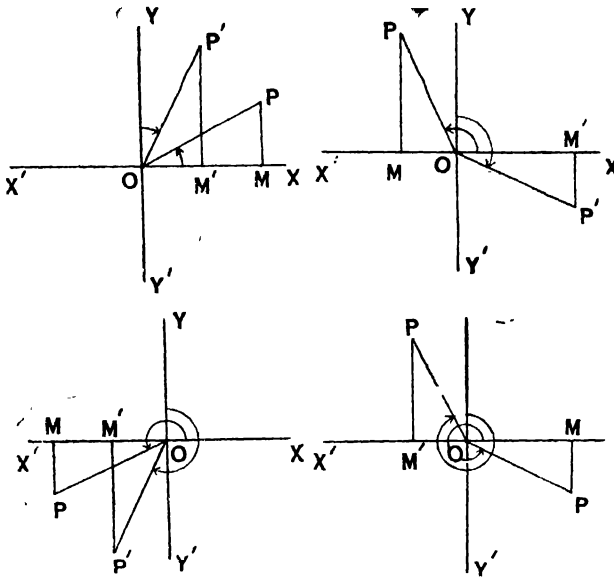
$\sec(-60°) = \sec 60° = 2$;

$\operatorname{cosec}(-60°) = -\operatorname{cosec} 60° = -\frac{2}{\sqrt{3}}$.

2. $(90° - \theta)$ কোণের এবং θ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের সম্পর্ক।

নবম শ্রেণীর পাঠ্যাংশে θ-কে সূক্ষ্মকোণ ধরিয়া অর্থাৎ θ প্রথমপাদে অবস্থিত ধরিয়া $(90° - \theta)$ কোণের এবং θ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের সম্পর্ক বিষয়ে

আলোচনা করা হইয়াছে। এস্থলে θ যে কোন পাদে অবস্থিত হইলেও উক্ত সম্পর্ক অক্ষুণ্ণ থাকিবে প্রমাণ করা হইতেছে।

মনে কর ঘূর্ণ্যমান OP সরলরেখা OX-এর সহিত XOP $(=\theta)$ কোণ উৎপন্ন করিয়াছে। এখন ঘূর্ণ্যমান সরলরেখাটিকে ঘুরাইয়া OY অবস্থানে আনয়ন কর এবং পুনরায় বিপরীত দিকে θ পরিমিত কোণ করিয়া OP′ অবস্থানে আনয়ন কর। তাহা তাহা হইলে $\angle XOP' = (90^\circ - \theta)$ হইল।

OP′ = OP লও। P ও P′ হইতে XX′ এর উপর PM এবং P′M′ লম্ব টান। তাহা হইলে $\angle MOP = \angle OP'M'$,

$\angle PMO = \angle P'M'O$ (সমকোণ বলিয়া) এবং $OP = OP'$

$\therefore$ $OM = F'M'$ এবং $PM = OM'$

প্রত্যেক পাদের চিত্রেই OM ও P′M′ এবং PM ও OM′ একই চিহ্ন বিশিষ্ট।

$\therefore$ $P'M' = +OM$ এবং $OM' = +PM.$

সুতরাং $\sin(90^\circ-\theta)=\sin XOP'=\dfrac{P'M'}{OP'}=\dfrac{OM}{OP}=\cos\theta$

$$\cos(90^\circ-\theta)=\cos XOP'=\frac{OM'}{OP'}=\frac{PM}{OP}=\sin\theta$$

$$\tan(90^\circ-\theta)=\tan XOP'=\frac{P'M'}{OM'}=\frac{OM}{PM}=\cot\theta$$

$$\cot(90^\circ-\theta)=\cot XOP'=\frac{OM'}{P'M'}=\frac{PM}{OM}=\tan\theta$$

$$\sec(90^\circ-\theta)=\sec XOP'=\frac{OP'}{OM'}=\frac{OP}{PM}=\operatorname{cosec}\theta$$

$$\operatorname{cosec}(90^\circ-\theta)=\operatorname{cosec} XOP'=\frac{OP'}{P'M'}=\frac{OP}{OM}=\sec\theta$$

উদাহরণ। $\sin 30^\circ=\sin(90^\circ-60^\circ)=\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$

$$\cos 30^\circ=\cos(90^\circ-60^\circ)=\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 45^\circ=\tan(90^\circ-45^\circ)=\cot 45^\circ=1$$

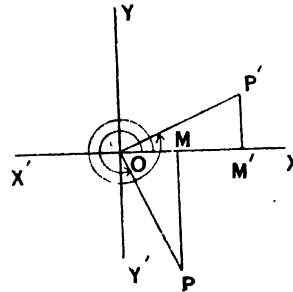
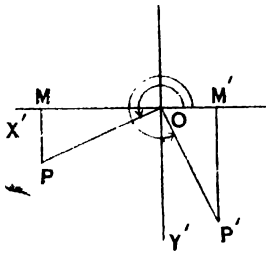
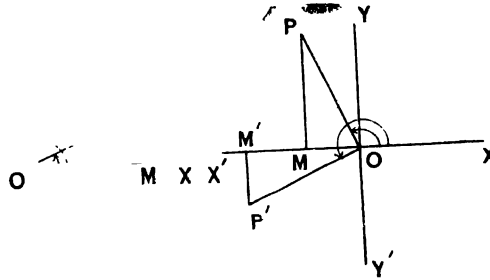
$$\cot 60^\circ=\cot(90^\circ-30^\circ)=\tan 30^\circ=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$$\sec 60^\circ=\sec(90^\circ-30^\circ)=\operatorname{cosec} 30^\circ=2$$

$$\operatorname{cosec} 45^\circ=\operatorname{cosec}(90^\circ-45^\circ)=\sec 45^\circ=\sqrt{2}.$$

3. $(90^\circ+\theta)$ কোণের এবং θ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের সম্পর্ক।

মনে কর ঘূর্ণ্যমান OP সরলরেখা, OX-এর সহিত XOP $(=\theta)$ কোণ উৎপন্ন করে। OP-এর O বিন্দুতে OP-এর উপর OP′ লম্ব টান। তাহা হইলে $\angle XOP'=90^\circ+\theta$ হইল। OP = OP′ লও। P এবং P′ হইতে XX′-এর উপর যথাক্রমে PM এবং P′M′ লম্ব টান। প্রতি পাদের চিত্রেই $POP'=90^\circ$, সুতরাং

$\angle POM + \angle P'OM' = 90°$. $\therefore$ $\angle POM = 90° - \angle P'OM' = OP'M'$;
$\angle PMO = P'M'O$ (সমকোণ) এবং $OP = OP'$.

$\therefore$ POM এবং P'OM' ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম $\therefore$ $OM' = PM$ এবং $P'M' = OM$.

ইহাদের প্রতি পাদের চিত্রেই PM ও OM' বিপরীত চিহ্নযুক্ত কিন্তু P'M' ও OM একই চিহ্নযুক্ত।

অর্থাৎ $OM' = -PM$ এবং $P'M' = +OM$.

$$\therefore \sin(90° + \theta) = \sin XOP' = \frac{P'M'}{OP'} = \frac{OM}{OP} = \cos\theta$$

$$\cos(90° + \theta) = \cos XOP' = \frac{OM'}{OP'} = \frac{-PM}{OP} = -\sin\theta$$

$$\tan(90° + \theta) = \tan XOP' = \frac{P'M'}{OM'} = \frac{OM}{-PM} = -\cot\theta$$

$$\cot(90° + \theta) = \cot XOP' = \frac{OM'}{P'M'} = \frac{-PM}{OM} = -\tan\theta$$

$$\sec(90° + \theta) = \sec XOP' = \frac{OP'}{OM'} = \frac{OP}{-PM} = -\operatorname{cosec}\theta$$

$$\operatorname{cosec}(90° + \theta) = \operatorname{cosec} XOP' = \frac{OP'}{P'M'} = \frac{OP}{OM} = \sec\theta$$

উদাহরণ। $\sin 150° = \sin (90° + 60°) = \cos 60° = \frac{1}{2}$

$\cos 150° = \cos (90° + 60°) = -\sin 60° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan 150° = \tan (90° + 60°) = -\cot 60° = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\cot 150° = \cot (90° + 60°) = -\tan 60° = -\sqrt{3}$

$\sec 150° = \sec (90° + 60°) = -\text{cosec } 60° = -\frac{2}{\sqrt{3}}$

$\text{cosec } 150° = \text{cosec } (90° + 60°) = \sec 60° = 2$

4. $(180° - \theta)$ কোণের এবং θ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের সম্পর্ক।

নবম শ্রেণীর পাঠ্যাংশে θকে সূক্ষ্মকোণ ধরিয়া অর্থাৎ θ প্রথম পাদে অবস্থিত ধরিয়া $(180° - \theta)$ কোণের এবং θ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের সম্পর্ক বিষয়ে আলোচনা করা হইয়াছে। এস্থলে θ যে কোন পাদে অবস্থিত হইলেও উক্ত সম্পর্ক অক্ষুণ্ণ থাকিবে প্রমাণ করা হইতেছে।

অনু 2. এবং অনু. 3 এর প্রয়োগ দ্বারা,

$\sin (180° - \theta) = \sin \{90° + (90° - \theta)\} = \cos (90° - \theta) = \sin \theta$

$\cos (180° - \theta) = \cos \{90 + (90° - \theta)\} = -\sin (90° - \theta) = -\cos \theta$

$\tan (180° - \theta) = \tan \{90° + (90° - \theta)\} = -\cot (90° - \theta) = -\tan \theta$

$\cot (180° - \theta) = \cot \{90° + (90° - \theta)\} = -\tan (90° - \theta) = -\cot \theta$

$\sec (180° - \theta) = \sec \{90° + (90° - \theta)\} = -\text{cosec } (90° - \theta) = -\sec \theta$

$\text{cosec } (180° - \theta) = \text{cosec } \{90° + (90° - \theta)\} = \sec (90° - \theta) = \text{cosec } \theta$

উদাহরণ। $\sin 150° = \sin (180° - 30°) = \sin 30° = \frac{1}{2}$

$\cos 120° = \cos (180° - 60°) = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$

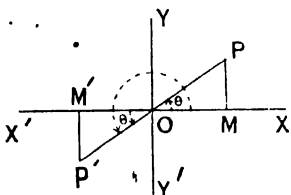
$\tan 135° = \tan (180° - 45°) = -\tan 45° = -1$

$\cot 135° = \cot (180° - 45°) = -\cot 45° = -1$

$\sec 120° = \sec (180° - 60°) = -\sec 60° = -2$

$\text{cosec } 120° = \text{cosec } (180° - 60°) = \text{cosec } 60° = \frac{2}{\sqrt{3}}$

5. $(180^\circ+\theta)$ কোণের এবং θ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের সম্পর্ক।

মনে কর ঘূর্ণ্যমান OP সরলরেখা, OX-এর সহিত ∠XOP সূক্ষ্মকোণ $(=\theta)$ উৎপন্ন করে। PO-কে P′ পর্যন্ত বর্ধিত কর। তাহা হইলে $\angle XOP' = 180^\circ+\theta$ হইল। OP = OP′ লও। P এবং P′ হইতে XX′-এর উপর যথাক্রমে PM এবং P′M′ লম্ব টান। এখন ∠POM = ∠P′OM′, ∠PMO = ∠P′M′O এবং OP = OP′,

∴ POM, P′OM′ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম। ∴ PM = P′M′ এবং OM = OM′ ; কিন্তু ইহারা বিপরীত চিহ্নযুক্ত অর্থাৎ P′M′ = − PM এবং OM′ = − OM.

$$\therefore \quad \sin(180^\circ+\theta)=\sin XOP'=\frac{P'M'}{OP'}=\frac{-PM}{OP}=-\sin\theta$$

$$\cos(180^\circ+\theta)=\cos XOP'=\frac{OM'}{OP'}=\frac{-OM}{OP}=-\cos\theta$$

$$\tan(180^\circ+\theta)=\tan\angle XOP'=\frac{P'M'}{OM'}=\frac{-PM}{-OM}=\frac{PM}{OM}=\tan\theta$$

$$\cot(180^\circ+\theta)=\cot XOP'=\frac{OM'}{P'M'}=\frac{-OM}{-PM}=\frac{OM}{PM}=\cot\theta$$

$$\sec(180^\circ+\theta)=\sec XOP'=\frac{OP'}{OM'}=\frac{OP}{-OM}=-\sec\theta$$

$$\operatorname{cosec}(180^\circ+\theta)=\operatorname{cosec} XOP'=\frac{OP'}{P'M'}=\frac{OP}{-PM}=-\operatorname{cosec}\theta.$$

θ সূক্ষ্মকোণ অর্থাৎ প্রথম পাদে অবস্থিত না হইয়া যে কোন পাদে অবস্থিত হইলেও পূর্বোক্ত সূত্র সমূহের সাহায্যে যে কোন $(180^\circ+\theta)$ কোণের এবং θ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের সম্পর্ক প্রতিষ্ঠিত করা যায়।

$\sin(180^\circ+\theta)=\sin\{90^\circ+(90^\circ+\theta)\}=\cos(90^\circ+\theta)=-\sin\theta$

$\cos(180^\circ+\theta)=\cos\{90^\circ+(90^\circ+\theta)\}=-\sin(90^\circ+\theta)=-\cos\theta$

তদ্রূপ $\tan(180^\circ+\theta)=\tan\theta$; $\cot(180^\circ+\theta)=\cot\theta$;

$\sec(180^\circ+\theta)=-\sec\theta$; $\operatorname{cosec}(180^\circ+\theta)=-\operatorname{cosec}\theta$

উদাহরণ। $\sin 210° = \sin (180° + 30°) = -\sin 30° = -\frac{1}{2}$

$\cos 225° = \cos (180° + 45°) = -\cos 45° = \frac{1}{-\sqrt{2}}$

$\tan 240° = \tan (180° + 60°) = \tan 60° = \sqrt{3}$

$\cot 210° = \cot (180° + 30)° = \cot 30° = \sqrt{3}$

$\sec 210° = \sec (180° + 30°) = -\sec 30° = \frac{2}{-\sqrt{3}}$.

$\operatorname{cosec} 210° = \operatorname{cosec} (180° + 30°) = -\operatorname{cosec} 30° = -2$.

৮. $(270° - \theta)$ কোণের এবং θ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতে সম্পর্ক।

$\sin (270° - \theta) = \sin \{180° + (90° - \theta)\} = -\sin (90° - \theta) = -\cos \theta$

$\cos (270° - \theta) = \cos \{180° + (90° - \theta)\} = -\cos (90° - \theta) = -\sin \theta$

$\tan (270° - \theta) = \tan \{180° + (90° - \theta)\} = \tan (90° - \theta) = \cot \theta$

$\cot (270° - \theta) = \cot \{180° + (90° - \theta)\} = \cot (90° - \theta) = \tan \theta$

$\sec (270° - \theta) = \sec \{180° + (90° - \theta)\} = -\sec (90° - \theta) = -\operatorname{cosec}$

$\operatorname{cosec} (270° - \theta) = \operatorname{cosec} \{180° + (90° - \theta)\} = -\operatorname{cosec} (90° - \theta)$

$= -\sec$

দ্রষ্টব্য। জ্যামিতিক চিত্রের সাহায্যেও উল্লিখিত সম্পর্ক প্রতিষ্ঠিত করা যায়।

উদাহরণ। $\sin 210° = \sin (270° - 60°) = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$.

$\cos 210° = \cos (270° - 60°) = -\sin 60° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan 210° = \tan (270° - 60°) = \cot 60° = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

$\cot 210° = \cot (270° - 60°) = \tan 60° = \sqrt{3}$

$\sec 210° = \sec (270° - 60°) = -\operatorname{cosec} 60° = -\frac{2}{\sqrt{3}}$.

$\operatorname{cosec} 210° = \operatorname{cosec} (270° - 60°) = -\sec 60° = -2$.

7. $(270°+\theta)$ কোণের এবং θ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের সম্পর্ক।

$\sin(270°+\theta)=\sin\{180°+(90°+\theta)\}=-\sin(90°+\theta)=-\cos\theta$

$\cos(270°+\theta)=\cos\{180°+(90°+\theta)\}=-\cos(90°+\theta)$

$=-(-\sin\theta)=\sin\theta$

$\tan(270°+\theta)=\tan\{180°+(90°-\theta)\}=\tan(90°+\theta)=-\cot\theta$

$\cot(270°+\theta)=\cot\{180°+(90°+\theta)\}=\cot(90°+0)=-\tan\theta$

$\sec(270°+\theta)=\sec\{180°+(90°+\theta)\}=-\sec(90°+\theta)$

$=-\{-\operatorname{cosec}\theta\}=\operatorname{cosec}\theta$

$\operatorname{cosec}(270°+\theta)=\operatorname{cosec}\{180°+(90°+\theta)\}=-\operatorname{cosec}(90°+\theta)$

$=-\sec\theta.$

উদাহরণ। $\sin 300°=\sin(270°+30°)=-\cos 30°=-\frac{\sqrt{3}}{2}.$

$\cos 300°=\cos(270°+30°)=\sin 30°=\frac{1}{2}$

$\tan 300°=\tan(270°+30°)=-\cot 30°=-\sqrt{3}$

$\cot 300°=\cot(270°+30°)=-\tan 30°=-\frac{1}{\sqrt{3}}.$

$\sec 300°=\sec(270°+30°)=\operatorname{cosec} 30°=2.$

$\operatorname{cosec} 300°=\operatorname{cosec}(270°+30°)=-\sec 30°=-\frac{2}{\sqrt{3}}$

দ্রষ্টব্য। জ্যামিতিক চিত্রের সাহায্যেও উল্লিখিত সম্পর্ক প্রতিষ্ঠিত করা যায়।

8. $(360°-\theta)$ কোণের এবং θ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের সম্পর্ক।

অনু. 1-এর চিত্র দেখ।

মনে কর ঘূর্ণ্যমান OP সরলরেখা OX-এর সহিত প্রথমতঃ XOP $(=\theta)$ কোণ উৎপন্ন করিল, আরও ঘুরিতে ঘুরিতে উহা O বিন্দুর চারিদিকে এক পূর্ণ আবর্তন করিয়া OX-এর সহিত আসিয়া মিলিত হইল এবং অতঃপর বিপরীতদিকে $\angle XOP$ $(=\theta)$ কোণের সমান XOP′ কোণ উৎপন্ন করিল। তাহা হইলে ঘড়ির কাঁটা যে দিকে

ঘোরে তাহার বিপরীত দিকে ঘুরিলে XOP′ কোণের পরিমাণ হয় $(360° - \theta)$ এবং ঘড়ির কাঁটা যে দিকে ঘোরে সেই দিকে ঘুরিলে XOP′ কোণের পরিমাণ হয় $-\theta$.

∴ ঘূর্ণ্যমান সরলরেখা কোন নির্দিষ্ট সরলরেখার সহিত $(360° - \theta)$ অথবা $(-\theta)$ কোণ উৎপন্ন করিলে ঘূর্ণ্যমান সরলরেখাটির অবস্থান একই হইবে, সুতরাং উহাদের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতও একই হইবে।

$$\therefore \begin{aligned} \sin(360° - \theta) &= \sin(-\theta) = -\sin\theta \\ \cos(360° - \theta) &= \cos(-\theta) = \cos\theta \\ \tan(360° - \theta) &= \tan(-\theta) = -\tan\theta \\ \cot(360° - \theta) &= \cot(-\theta) = -\cot\theta \\ \sec(360° - \theta) &= \sec(-\theta) = \sec\theta \\ \operatorname{cosec}(360° - \theta) &= \operatorname{cosec}(-\theta) = -\operatorname{cosec}\theta. \end{aligned}$$

উদাহরণ। $\sin 330° = \sin(360° - 30°) = -\sin 30° = -\frac{1}{2}$

$\cos 330° = \cos(360° - 30°) = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\tan 330° = \tan(360° - 30°) = -\tan 30° = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

$\cot 330° = \cot(360° - 30°) = -\cot 30° = -\sqrt{3}$.

$\sec 330° = \sec(360° - 30°) = \sec 30° = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

$\operatorname{cosec} 330° = \operatorname{cosec}(360° - 30°) = -\operatorname{cosec} 30° = -2$.

9. $(360° + \theta)$ কোণ এবং θ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের সম্পর্ক। ঘূর্ণ্যমান সরলরেখা কোন নির্দিষ্ট সরলরেখার সহিত θ কোণ উৎপন্ন করিলে ঘূর্ণ্যমান সরলরেখা যে অবস্থানে থাকে, উহা এক বা একাধিক সম্পূর্ণ আবর্তন করিয়া আরও θ পরিমিত কোণ উৎপন্ন করিলেও ঐ একই অবস্থানে থাকে। সুতরাং $(360° + \theta)$ বা $(360° \times 2 + \theta)$ বা $(360° \times 3 + \theta)$ ইত্যাদি কোণ সমূহের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত, θ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের সমান হইবে।

উদাহরণ। $\sin 510° = \sin(360° + 150°) = \sin 150°$
$= \sin(180° - 30°) = \sin 30° = \frac{1}{2}$

$\tan 1740° = \tan(360° \times 4 + 300°) = \tan 300°$
$= \tan(360° - 60°) = -\tan 60° = -\sqrt{3}$.

$\sec 2010° = \sec(360° \times 5 + 210°) = \sec 210°$
$= \sec(180° + 30°) = -\sec 30° = -\frac{2}{\sqrt{3}}$.

10. 0° হইতে 180° পর্যন্ত কোণসমূহের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের তালিকা

Angle→	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
Sine	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
Cosine	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
Tangent	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	unde-fined*	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
Cotan-gent	unde-fined*	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	unde-fined*
Secant	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	unde-fined*	-2	$-\sqrt{2}$	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	-1
Cosecant	unde-fined*	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	unde-fined*

* $\frac{a}{0}$ অর্থহীন। যদি $\frac{a}{0}=b$ ধরা যায়, তাহা হইলে $a=0\times b=0$ ইহাও অসম্ভব যদি $a=0$ না হয়। যদি $a=0$ হয় তাহা হইলে $b=\frac{0}{0}$; $\frac{0}{0}$ ইহাও অর্থহীন।

পূর্বে $\frac{a}{0}$ কে অসীম (∞) ধরা হইত, কারণ $\frac{a}{0}$ অর্থে a হইতে 0 কতবার বাদ দেওয়া যায় তাহা বুঝায়। এখন a হইতে 0 যতবার ইচ্ছা বাদ দেওয়া যাইতে পারে। প্রতি বারে 0 বাদ দিয়া বিয়োগফল a-ই থাকে। সুতরাং ধরা হইত $\frac{a}{0}=\infty$

উদা. 1. Find the value of the trigonometrical functions of each of the following angles :—

(i) 150°, (ii) −150°, (iii) 210°, (iv) −210°,
(v) 300°, (vi) −300°, (vii) 405°, (viii) −405°.

(i) $\sin 150° = \sin (180° - 30°) = \sin 30° = \frac{1}{2}$;

$\cos 150° = \cos (180° - 30°) = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

$\tan 150° = \tan (180° - 30°) = -\tan 30° = -\frac{1}{\sqrt{3}}$;

$\therefore$ $\cot 150° = -\sqrt{3}$; $\sec 150° = -\frac{2}{\sqrt{3}}$; $\operatorname{cosec} 150° = 2$.

(ii) $\sin(-150°) = -\sin 150° = -\frac{1}{2}$

$\cos(-150°) = \cos 150° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan(-150°) = -\tan 150° = -\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore$ $\cot(-150°) = \sqrt{3}$, $\sec(-150°) = -\frac{2}{\sqrt{3}}$, $\operatorname{cosec}(-150) = -2$.

(iii) $\sin 210° = \sin (180° + 30°) = -\sin 30° = -\frac{1}{2}$

$\cos 210° = \cos (180° + 30°) = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan 210° = \tan (180° + 30°) = \tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore$ $\cot 210° = \sqrt{3}$, $\sec 210° = -\frac{2}{\sqrt{3}}$, $\operatorname{cosec} 210° = -2$.

(iv) $\sin(-210°) = -\sin 210° = -(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$

$\cos(-210°) = \cos 210° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan(-210°) = -\tan 210° = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

$\therefore\quad \cot(-210°) = -\sqrt{3}$; $\sec(-210°) = -\frac{2}{\sqrt{3}}$; $\text{cosec}\ 210° = 2.$

(v) $\sin 300° = \sin(360° - 60°) = -\sin 60° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos 300° = \cos(360° - 60°) = \cos 60° = \frac{1}{2}$

$\tan 300° = \tan(360° - 60°) = -\tan 60° = -\sqrt{3}.$

$\therefore\quad \cot 300° = -\frac{1}{\sqrt{3}}$; $\sec 300° = 2$; $\text{cosec}\ 300° = -\frac{2}{\sqrt{3}}.$

(vi) $\sin(-300°) = -\sin 300° = -\sin(360° - 60°)$

$= -(-\sin 60°) = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos(-300°) = \cos 300° = \cos(360° - 60°)$

$= \cos 60° = \frac{1}{2}$

$\tan(-300°) = -\tan 300° = -\tan(360° - 60°)$

$= -(-\tan 60°) = \tan 60° = \sqrt{3}.$

$\therefore\quad \cot(-300°) = \frac{1}{\sqrt{3}}$; $\sec(-300°) = 2$; $\text{cosec}\ (-300°) = \frac{}{\sqrt{3}}$

(vii) $\sin 405° = \sin(360° + 45°) = \sin 45° \ \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\cos 405° = \cos(360° + 45°) = \cos 45 \ \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\tan 405° = \tan(360° + 45°) = \tan 45° = 1$

$\cot 405° = 1$; $\sec 405° = \sqrt{2}$; $\text{cosec}\ 405° = \sqrt{2}.$

(viii) $\sin(-405°) = -\sin 405° = -\sin 45° = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\cos(-405°) = \cos 405° = \cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\tan(-405°) = -\tan 405° = -\tan 45° = -1$

$\cot(-405°) = -1,$

$\sec(-405°) = \sqrt{2},$

$\text{cosec}\ (-405°) = -\sqrt{2}.$

উদা. 2. Express as trigonometrical function of θ.

(i) $\sin(3\pi-\theta)$, (ii) $\cos(4\pi+\theta)$,

(iii) $\sin(\frac{13}{2}\pi+\theta)$, (iv) $\cos(6\pi-\theta)$.

(i) $\sin(3\pi-\theta)=\sin(2\pi+\overline{\pi-\theta})=\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$

(ii) $\cos(4\pi+\theta)=\cos(2.2\pi+\theta)=\cos\theta$

(iii) $\sin\left(\frac{13\pi}{2}+\theta\right)=\sin\left(2.3\pi+\overline{\frac{\pi}{2}+\theta}\right)$

$$=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos\theta$$

(iv) $\cos(6\pi-\theta)=\cos(3.2\pi-\theta)=\cos(-\theta)=\cos\theta$.

উদা. 3. Find the values of

$$\cos\pi,\ \sin\frac{3\pi}{2},\ \tan 2\pi.$$

$\cos\pi=\cos 180°=\cos(180°-0°)=-\cos 0°=-1$

$\sin\frac{3\pi}{2}=\sin 270°=\sin(270°-0°)=-\cos 0°=-1$

$\tan 2\pi=\tan 360°=\tan(360°+0°)=\tan 0°=0$

উদা. 4. Express in terms of trigonometrical functions of positive angles less than 45°.

(i) $\sin 165°$, (ii) $\cos(-780°)$, (iii) $\tan 1140°$

(i) $\sin 165°=\sin(180°-15°)=\sin 15°$.

(ii) $\cos(-780°)=\cos 780°=\cos(360°\times 2+60°)$

$$=\cos 60°=\cos(90°-30°)=\sin 30°.$$

(iii) $\tan 1140°=\tan(360°\times 3+60°)=\tan 60°=\cot 30°$.

উদা. 5. Find the values of :

(i) $\sin\frac{27\pi}{4}$ (ii) $\sec\left(-\frac{20\pi}{3}\right)$

(i) $\sin\frac{27\pi}{4}=\sin\left(3.2\pi+\frac{3\pi}{4}\right)=\sin\frac{3\pi}{4}$.

$=\sin 135$ $\frac{1}{}$

(ii) $\sec\left(-\frac{20\pi}{3}\right)=\sec\frac{20\pi}{3}=\sec\left(2.3\pi+\frac{2\pi}{3}\right)$

$=\sec\frac{2\pi}{3}=\sec 120^\circ=-2.$

উদা. 6. Prove that $\sin 110^\circ+\cos 130^\circ=\sin 70^\circ-\cos 50^\circ$

$\sin 110^\circ+\cos 130^\circ=\sin(180^\circ-70^\circ)+\cos(180^\circ-50^\circ)$

$=\sin 70^\circ-\cos 50^\circ$

উদা. 7. Prove that $\sin 510^\circ\cos 210^\circ-\sin 330^\circ\cos 330^\circ=0$

$\sin 510^\circ\cos 210^\circ-\sin 330^\circ\cos 330^\circ$

$=\sin(360^\circ+150^\circ)\cos(180^\circ+30^\circ)-\sin(360^\circ-30^\circ)\cos(360^\circ-30^\circ)$

$=\sin 150^\circ(-\cos 30^\circ)-(-\sin 30^\circ)\cos 30^\circ$

$=\sin(180^\circ-30^\circ).(-\cos 30^\circ)+\sin 30^\circ\cos 30^\circ$

$=\sin 30^\circ.(-\cos 30^\circ)+\sin 30^\circ\cos 30^\circ$

$=-\sin 30^\circ\cos 30^\circ+\sin 30^\circ\cos 30^\circ=0$

উদা. 8. If $A+C=B+D=\pi$,

prove that $\cos A+\cos B+\cos C+\cos D=0$

$A+C=B+D=\pi$, $\therefore$ $A=\pi-C$ এবং $B=\pi-D$

$\therefore$ $\cos A+\cos B+\cos C+\cos D$

$=\cos(\pi-C)+\cos(\pi-D)+\cos C+\cos D$

$=-\cos C-\cos D+\cos C+\cos D=0.$

উদা. 9. Find the value of $\sin\left(7n\pi+\frac{\pi}{3}\right)$, when

(*i*) n is a positive even number,

(*ii*) n is a positive odd number.

(*i*) যখন n ধনাত্মক যুগ্ম সংখ্যা, $\sin\left(7n\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(*ii*) যখন n ধনাত্মক অযুগ্ম সংখ্যা, $\sin\left(7n\pi+\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

উদা. 10. Prove that $\tan\frac{\pi}{8}.\tan\frac{3\pi}{8}.\tan\frac{5\pi}{8}.\tan\frac{7\pi}{8}=1$

$$\tan\frac{\pi}{8}.\tan\frac{3\pi}{8}.\tan\frac{5\pi}{8}.\tan\frac{7\pi}{8}$$

$$=\tan\frac{\pi}{8}.\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}\right).\tan\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{8}\right).\tan\left(\pi-\frac{\pi}{8}\right)$$

$$=\tan\frac{\pi}{8}.\cot\frac{\pi}{8}\cdot\left(-\cot\frac{\pi}{8}\right)\left(-\tan\frac{\pi}{8}\right)$$

$$=\tan\frac{\pi}{8}.\cot\frac{\pi}{8}.\cot\frac{\pi}{8}.\tan\frac{\pi}{8}=1.1=1.$$

উদা. 11. Solve $\cos^2\theta=\frac{3}{4}$, giving all the possible values of θ, when $0°<\theta<360°$.

$$\cos^2\theta=\frac{3}{4}\quad\therefore\quad\cos\theta=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

যখন $\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\theta=30°$ or $330°$

যেহেতু $\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos 30°=\cos(360°-30°)=\cos 330°$

আবার যখন $\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\theta=150°$ or $210°$

যেহেতু $-\frac{\sqrt{3}}{2}=-\cos 30°=\cos(180°-30°)=\cos 150°$

এবং $\frac{-\sqrt{3}}{2}=-\cos 30°=\cos(180°+30°)=\cos 210°$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান : 30°, 150°, 210°, 330°.

প্রশ্নমালা 2

1. Find the value of the trigonometrical ratios of the following angles :

(i) $135°$ (ii) $150°$ (iii) $210°$ (iv) $225°$

(v) $240°$ (vi) $300°$ (vii) $315°$ (viii) $330°$

(ix) $405°$ (x) $480°$ (xi) $750°$ (xii) $1215°$

(xiii) $-30°$ (xiv) $-60°$ (xv) $-120°$ (xvi) $-150°$

(xvii) $-210°$ (xviii) $-390°$ (xix) $-855°$ (xx) $-1110°$

2. Express as trigonometric function of θ.

(i) $\sin(630° + \theta)$ (ii) $\cos(720° + \theta)$ (iii) $\tan(990° - \theta)$

(iv) $\cot(\theta - 450°)$ (v) $\sec\left(\frac{9\pi}{2} - \theta\right)$ (vi) $\text{cosec}\,(9\pi - \theta)$

(vii) $\sin\frac{1}{2}(\theta - 4\pi)$.

3. Express in terms of trigonometric function of positive angles less than $45°$.

(i) $\sin 1245°$ (ii) $\cos 1695°$ (iii) $\tan(-470°)$

(iv) $\cot(-500°)$.

4. Find the value of (i) $\tan\pi$ (ii) $\cos 270°$ (iii) $\sin 630°$.

5. Prove that $\sin A = -\sin(A - 180°)$

6. Prove that $\cos(360° - A) + \sin(270° + A) + \sin(270° - A) - \cos(180° + A) = 0$

7. Find the value of $\sin\theta - \cos\theta$, when $\theta = 2220°$

8. Prove that

$$\sin(\pi - A)\cos\left(\frac{\pi}{2} - A\right) - \cos(\pi - A)\sin\left(\frac{\pi}{2} - A\right) = 1$$

9. Prove that

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + A\right) + \cot\left(\frac{\pi}{2} + A\right) = -\sec A\,\text{cosec}\,A.$$

10. Find all the values of θ between 0° and 360°, if $\sin^2\theta = \frac{1}{2}$.

11. Prove that $\cos(\theta - 270^\circ) + \sin\theta = 0$

12. Prove that $\cot 225^\circ + \sin 270^\circ = 0$

13. Find the value of $\sin 210^\circ + \cos 240^\circ + \cot 225^\circ$.

14. Find the value of $\cos 300^\circ - \sin 330^\circ + \tan 315^\circ$.

15. Prove that $\cos^2\frac{\pi}{8} + \cos^2\frac{3\pi}{8} + \cos^2\frac{5\pi}{8} + \cos^2\frac{7\pi}{8} = 2$

16. Find the values of θ between 0° and 360°, when

(i) $\sin\theta = \frac{1}{2}$ (ii) $\cos\theta = \frac{1}{2}$ (iii) $\tan\theta = 1$ (iv) $\tan\theta = -\sqrt{3}$.

17. If A, B, C are the angles of a triangle, prove that $\tan(A+B) + \tan C = 0$.

18. If A, B, C, D be the angles of a cyclic quadrilateral, prove that $\sin A + \sin B = \sin C + \sin D$

তৃতীয় অধ্যায়

মিশ্র কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

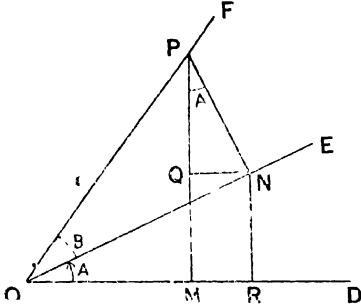
1. দুই বা ততোধিক কোণের সমষ্টি বা অন্তরফলকে **মিশ্র কোণ (Compound Angle)** বলে।

A + B, A + B, A + B + C কোণগুলি মিশ্রকোণ।

2. To prove that,

$\sin (A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$

and $\cos (A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$,

যখন A, B এবং (A + B) প্রত্যেকটি ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ।

মনে কর ঘূর্ণ্যমান কোন সরলরেখা বা দণ্ড OD অবস্থান হইতে ঘুরিতে আরম্ভ করিয়া OE অবস্থানে আসিয়া OD-র সহিত DOE (= A) কোণ এবং আরও ঘুরিয়া OF অবস্থানে আসিয়া OE-র সহিত EOF (= B) কোণ উৎপন্ন করিয়াছে। তাহা হইলে ∠DOF = (A + B) হইল।

OF-এর উপর যে কোন P বিন্দু লও। P হইতে OD-র উপর PM এবং OE-র উপর PN লম্ব টান। N হইতে PM-এর উপর NQ এবং OD-এর উপর NR লম্ব টান। তাহা হইলে NQ ∥ OD হইল।

এখন, ∠QPN = ∠PNQ এর পূরক = ∠QNO = একান্তর ∠NOR = ∠A

এখন, $\sin (A+B) = \sin \angle DOF = \dfrac{PM}{OP} = \dfrac{PQ + QM}{OP}$

$$= \frac{PQ + NR}{OP} = \frac{NR}{OP} + \frac{PQ}{OP}$$

$$= \frac{NR}{ON} \cdot \frac{ON}{OP} + \frac{PQ}{PN} \cdot \frac{PN}{OP}$$

$$= \sin A \cos B + \cos A \sin B$$

আবার, $\cos(A+B) = \cos\angle DOF = \dfrac{OM}{OP} = \dfrac{OR - MR}{OP}$

$$= \frac{OR - NQ}{OP} = \frac{OR}{OP} - \frac{NQ}{OP}$$

$$= \frac{OR}{ON} \cdot \frac{ON}{OP} - \frac{NQ}{PN} \cdot \frac{PN}{OP}$$

$$= \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

দ্রষ্টব্য। A, B এবং (A + B) সূক্ষ্মকোণ ধরিয়া উল্লিখিত সূত্র প্রমাণ করা হইয়াছে বটে কিন্তু A ও B-র যে কোন মানে উহা সত্য হইবে।

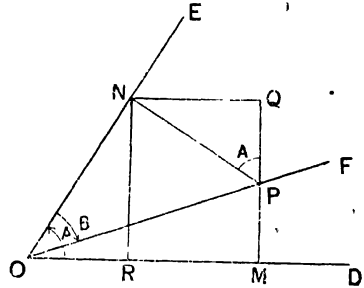
3. To prove that

$$\sin(A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$$

and $\cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$,

যখন A এবং B উভয়েই ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ এবং $A > B$।

মনে কর ঘূর্ণ্যমান কোন সরলরেখা নির্দিষ্ট OD অবস্থান হইতে ঘুরিতে আরম্ভ করিয়া OE অবস্থানে আসিয়া OD-র সহিত $\angle DOE$ $(= A)$ উৎপন্ন করিয়াছে এবং অতঃপর OE হইতে বিপরীতদিকে ঘুরিয়া OE-র সহিত A অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর $\angle EOF$ $(= B)$ উৎপন্ন করিয়াছে। তাহা হইলে $\angle DOF = A - B$.

OF-এর উপর যে কোন P বিন্দু লও। P হইতে OD-র উপর PM এবং OE-র উপর PN লম্ব টান। N হইতে বর্ধিত MP-র উপর NQ এবং OD-র উপর NR লম্ব টান। তাহা হইলে NQ ∥ OD হইল।

$\angle QPN = \angle PNQ$ এর পূরক $= \angle QNE =$ অনুরূপ $\angle DOE = \angle A$.

এখন, $\sin(A - B) = \sin\angle DOF = \dfrac{PM}{OP} = \dfrac{QM - PQ}{OP} = \dfrac{NR - PQ}{OP}$

$$\frac{NR}{OP}-\frac{PQ}{OP}=\frac{NR}{ON}\cdot\frac{ON}{OP}-\frac{PQ}{PN}\cdot\frac{PN}{OP}$$

$$\sin A\cos B-\cos A\sin B$$

$$=\cos\angle DOF=\frac{OM}{OP}=\frac{OR+RM}{OP}$$

$$\frac{OR+NQ}{OP}=\frac{OR}{OP}+\frac{NQ}{OP}$$

$$\frac{OR}{ON}\cdot\frac{ON}{OP}+\frac{NQ}{PN}\cdot\frac{PN}{OP}$$

$$=\cos A\cos B+\sin A\sin B$$

দ্রষ্টব্য। A ও B সূক্ষ্মকোণ ধরিয়া সূত্রটি প্রমাণ করা হইয়াছে বটে কিন্তু A ও B-র যে কোন মানে উহা সত্য হইবে।

4. To prove that

$$\tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B},$$

and $$\tan(A-B)=\frac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\tan B}$$

$$\tan(A+B)=\frac{\sin(A+B)}{\cos(A+B)}=\frac{\sin A\cos B+\cos A\sin B}{\cos A\cos B-\sin A\sin B}$$

$$=\frac{\dfrac{\sin A\cos B}{\cos A\cos B}+\dfrac{\cos A\sin B}{\cos A\cos B}}{\dfrac{\cos A\cos B}{\cos A\cos B}-\dfrac{\sin A\sin B}{\cos A\cos B}},$$

[লব ও হর উভয়কে $\cos A\cos B$ দ্বারা ভাগ করিয়া,]

$$=\frac{\dfrac{\sin A}{\cos A}+\dfrac{\sin B}{\cos B}}{1-\dfrac{\sin A}{\cos A}\cdot\dfrac{\sin B}{\cos B}}=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$$

$$\tan(A-B)=\frac{\sin(A-B)}{\cos(A-B)}=\frac{\sin A\cos B-\cos A\sin B}{\cos A\cos B+\sin A\sin B}$$

$$=\frac{\dfrac{\sin A\cos B}{\cos A\cos B}-\dfrac{\cos A\sin B}{\cos A\cos B}}{\dfrac{\cos A\cos B}{\cos A\cos B}+\dfrac{\sin A\sin B}{\cos A\cos B}}$$

[লব ও হর উভয়কে cos A cos B দ্বারা ভাগ করিয়া]

$$=\frac{\dfrac{\sin A}{\cos A}-\dfrac{\sin B}{\cos B}}{1+\dfrac{\sin A}{\cos A}\cdot\dfrac{\sin B}{\cos B}}=\frac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\tan B}$$

দ্রষ্টব্য। $\tan(A+B)$ ও $\tan(A-B)$-এর সূত্রের একটি কোণ $\frac{\pi}{4}$ অর্থাৎ $45°$ এবং অপরটি A ধরিলে,

$$\tan(45°+A)=\frac{\tan 45°+\tan A}{1-\tan 45°\,.\,\tan A}=\frac{1+\tan A}{1-\tan A}$$

এবং $$\tan(45°-A)=\frac{\tan 45°-\tan A}{1+\tan 45\,.\,\tan A}=\frac{1-\tan A}{1+\tan A}$$

4. To prove that

$$\cot(A+B)=\frac{\cot A\cot B-1}{\cot B+\cot A}$$

and $$\cot(A-B)=\frac{\cot A\cot B+1}{\cot B-\cot A}$$

$$\cot(A+B)=\frac{\cos(A+B)}{\sin(A+B)}=\frac{\cos A\cos B-\sin A\sin B}{\sin A\cos B+\cos A\sin B}$$

$$=\frac{\dfrac{\cos A\cos B}{\sin A\sin B}-\dfrac{\sin A\sin B}{\sin A\sin B}}{\dfrac{\sin A\cos B}{\sin A\sin B}+\dfrac{\cos A\sin B}{\sin A\sin B}}$$

[লব ও হর উভয়কে sin A sin B দ্বারা ভাগ করিয়া]

$$=\frac{\cot A\cot B-1}{\cot B+\cot A}$$

$$\cot(A-B) = \frac{\cos(A-B)}{\sin(A-B)} = \frac{\cos A \cos B + \sin A \sin B}{\sin A \cos B - \cos A \sin B}$$

$$= \frac{\dfrac{\cos A \cos B}{\sin A \sin B} + \dfrac{\sin A \sin B}{\sin A \sin B}}{\dfrac{\sin A \cos B}{\sin A \sin B} - \dfrac{\cos A \sin B}{\sin A \sin B}}$$

[লব ও হর উভয়কে sin A sin B দ্বারা ভাগ করিয়া]

$$= \frac{\cot A \cot B + 1}{\cot B - \cot A}$$

5. জ্যামিতিক প্রণালীতে $\tan(A+B) = \dfrac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A . \tan B}$

এবং $\tan(A-B) = \dfrac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A . \tan B}$ এর প্রমাণ করা যায়।

অনু 2. এর চিত্র (পৃঃ 254) হইতে,

$$\tan(A+B) = \frac{PM}{OM} = \frac{QM + PQ}{OR - MR} = \frac{NR + PQ}{OR - QN}$$

$$= \frac{\dfrac{NR}{OR} + \dfrac{PQ}{OR}}{\dfrac{OR}{OR} - \dfrac{QN}{OR}}$$ [লব ও হরকে OR দ্বারা ভাগ করিয়া।]

PQN এবং NOR ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ,

কারণ $\angle QPN = \angle NOR$

$\angle NQP = \angle NRO$.

$$= \frac{\dfrac{NR}{OR} + \dfrac{PQ}{OR}}{1 - \dfrac{QN}{PQ} \cdot \dfrac{PQ}{OR}}$$

$\therefore \dfrac{PQ}{OR} = \dfrac{PN}{ON}$ এবং $\dfrac{QN}{PQ} = \dfrac{NR}{OR}$

$$= \frac{\dfrac{NR}{OR} + \dfrac{PN}{ON}}{1 - \dfrac{NR}{OR} \cdot \dfrac{PN}{ON}} = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

অনু. 3. এর চিত্র (পৃঃ 255) হইতে,

$$\tan(A-B)=\frac{PM}{OM}=\frac{QM-PQ}{OR+RM}=\frac{NR-PQ}{OR+NQ}$$

$$=\frac{\frac{NR}{OR}-\frac{PQ}{OR}}{\frac{OR}{OR}+\frac{NQ}{OR}}$$

PQN, NOR ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ, কারণ

$\angle NPQ=\angle NOR$

$\angle NQP=\angle NRO$

$$=\frac{\frac{NR}{OR}-\frac{PQ}{OR}}{1+\frac{NQ}{PQ}\cdot\frac{PQ}{OR}}$$

$\frac{PQ}{OR}=\frac{PN}{ON}$ এবং $\frac{NQ}{PQ}=\frac{NR}{OR}$,

$$=\frac{\frac{NR}{OR}-\frac{PN}{ON}}{1+\frac{NR}{OR}\cdot\frac{PN}{ON}}=\frac{\tan A-\tan B}{1+\tan A.\tan B}$$

6. To prove that

$$\sin(\mathbf{A+B+C})=\sin \mathbf{A}\cos \mathbf{B}\cos \mathbf{C}+\sin \mathbf{B}\cos \mathbf{C}\cos \mathbf{A}$$
$$+\sin \mathbf{C}\cos \mathbf{A}\cos \mathbf{B}-\sin \mathbf{A}\sin \mathbf{B}\sin \mathbf{C}\cdots(i)$$
$$=\cos \mathbf{A}\cos \mathbf{B}\cos \mathbf{C}\,(\tan \mathbf{A}+\tan \mathbf{B}+\tan \mathbf{C}$$
$$-\tan \mathbf{A}\tan \mathbf{B}\tan \mathbf{C})\cdots(ii)$$

$$\sin(A+B+C)=\sin\{(A+B)+C\}$$
$$=\sin(A+B)\cos C+\cos(A+B)\sin C$$
$$=(\sin A\cos B+\cos A\sin B)\cos C$$
$$+(\cos A\cos B-\sin A\sin B)\sin C$$
$$=\sin A\cos B\cos C+\sin B\cos C\cos A$$
$$+\sin C\cos A\cos B-\sin A\sin B\sin C\quad(i)$$
$$=\cos A\cos B\cos C$$
$$\left(\frac{\sin A\cos B\cos C}{\cos A\cos B\cos C}+\frac{\sin B\cos C\cos A}{\cos A\cos B\cos C}\right.$$
$$\left.+\frac{\sin C\cos A\cos B}{\cos A\cos B\cos C}-\frac{\sin A\sin B\sin C}{\cos A\cos B\cos C}\right)$$
$$=\cos A\cos B\cos C\,(\tan A+\tan B+\tan C$$
$$-\tan A\tan B\tan C)\quad\cdots\cdots(ii)$$

7. To prove that

$$\cos(A+B+C)=\cos A\cos B\cos C-\cos A\sin B\sin C-\cos B\sin C\sin A-\cos C\sin A\sin B \quad \cdots \text{(i)}$$

$$=\cos A\cos B\cos C(1-\tan A\tan B-\tan B\tan C-\tan C\tan A) \quad \cdots \text{(ii)}$$

$$(A+B+C)=\cos\{(A+B)+C\}$$

$$=\cos(A+B)\cos C-\sin(A+B)\sin C$$

$$=(\cos A\cos B-\sin A\sin B)\cos C-(\sin A\cos B+\cos A\sin B)\sin C$$

$$=\cos A\cos B\cos C-\sin A\sin B\cos C-\sin C\sin A\cos B-\sin B\sin C\cos A.$$

$$=\cos A\cos B\cos C-\cos A\sin B\sin C-\cos B\sin C\sin A-\cos C\sin A\sin B \quad \cdots \text{(i)}$$

$$=\cos A\cos B\cos C\left(\frac{\cos A\cos B\cos C}{\cos A\cos B\cos C}-\frac{\cos A\sin B\sin C}{\cos A\cos B\cos C}-\frac{\cos B\sin C\sin A}{\cos A\cos B\cos C}-\frac{\cos C\sin A\sin B}{\cos A\cos B\cos C}\right)$$

$$=\cos A\cos B\cos C(1-\tan B\tan C-\tan C\tan A-\tan A\tan B)$$

$$=\cos A\cos B\cos C(1-\tan A\tan B-\tan B\tan C-\tan C\tan A) \quad \cdots \text{(ii)}$$

8. To prove that

$$\tan(A+B+C)=\frac{\tan A+\tan B+\tan C-\tan A\tan B\tan C}{1-\tan A\tan B-\tan B\tan C-\tan C\tan A}$$

$$\tan(A+B+C)=\tan\{(A+B)+C\}$$

$$=\frac{\tan(A+B)+\tan C}{1-\tan(A+B)\tan C}$$

$$=\frac{\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}+\tan C}{1-\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}\cdot\tan C}$$

$$= \frac{\dfrac{\tan A + \tan B + \tan C - \tan A \tan B \tan C}{1 - \tan A \tan B}}{\dfrac{1 - \tan A \tan B - \tan A \tan C - \tan B \tan C}{1 - \tan A \tan B}}$$

$$= \frac{\tan A + \tan B + \tan C - \tan A \tan B \tan C}{1 - \tan A \tan B - \tan B \tan C - \tan C \tan A}.$$

9. সূত্র সমূহের প্রয়োগ।

উদা. 1. Find the values of $\sin 75°$, $\cos 75°$, $\sin 15°$, $\cos 15°$.

$\sin 75° = \sin(45° + 30°) = \sin 45° \cos 30° + \cos 45° \sin 30°$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

$\cos 75° = \cos(45° + 30°) = \cos 45° \cos 30° - \sin 45° \sin 30°$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

$\sin 15° = \sin(45° - 30°) = \sin 45° \cos 30° - \cos 45° \sin 30°$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

$\cos 15° = \cos(45° - 30°) = \cos 45° \cos 30° + \sin 45° \sin 30°$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}.$$

$\sin 75°$ ও $\cos 75°$ এর মান হইতে একেবারে $\cos 15°$ ও $\sin 15°$ এর মান নির্ণয় করা যায় এবং $\sin 15°$ ও $\cos 15°$ এর মান হইতে একেবারে $\cos 75°$ ও $\sin 75°$ এর মান নির্ণয় করা যায়।

কারণ, $\cos 15° = \cos(90° - 75°) = \sin 75° = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$

$\sin 15° = \sin(90° - 75°) = \cos 75° = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$

$\cos 75° = \cos(90° - 15°) = \sin 15° = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$

$\sin 75° = \sin(90° - 15°) = \cos 15° = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}.$

উদা. 2. Find the values of

tan 75°, tan 15° and cot 75°, cot 15°.

$$\tan 75° = \tan(45° + 30°) = \frac{\tan 45° + \tan 30°}{1 - \tan 45° \tan 30°}$$

$$= \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 - 1.\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} = \frac{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = \frac{(\sqrt{3}+1)^2}{(\sqrt{3})^2 - 1}$$

$$\frac{4 + 2\sqrt{3}}{2} = 2 + \sqrt{3}.$$

$$\tan 15° = \tan(45° - 30°) = \frac{\tan 45° - \tan 30°}{1 + \tan 45° \tan 30°}$$

$$= \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + 1.\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = \frac{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} = \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{(\sqrt{3})^2 - 1}$$

$$= \frac{4 - 2\sqrt{3}}{2} = 2 - \sqrt{3}$$

$$\cot 75° = \cot(45° + 30°) = \frac{\cot 45° \cot 30° - 1}{\cot 30° + \cot 45°}$$

$$= \frac{1.\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3}+1} = \frac{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{3 - 1} = 2 - \sqrt{3}.$$

$$\cot 15° = \cot(45° - 30°) = \frac{\cot 45° \cot 30° + 1}{\cot 30° - \cot 45°} = \frac{1.\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$$

$$= \frac{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{3 - 1} = 2 + \sqrt{3}.$$

এস্থলেও tan 75° এবং tan 15°-এর মান হইতে একেবারে cot 15° ও cot 75°-এর মান নির্ণয় করা যায়।

উদা. 3. Prove that $\tan(45^\circ-\theta)\tan(45^\circ+\theta)=1$.

$$\text{L. H. S.}=\frac{\tan 45^\circ-\tan\theta}{1+\tan 45^\circ\tan\theta}\times\frac{\tan 45^\circ+\tan\theta}{1-\tan 45^\circ\tan\theta}$$

$$=\frac{1-\tan\theta}{1+1.\tan\theta}\times\frac{1+\tan\theta}{1-1.\tan\theta}=1$$

উদা. 4. Prove that $\frac{\sin(A-B)}{\cos A\cos B}=\tan A-\tan B$

$$\frac{\sin(A-B)}{\cos A\cos B}=\frac{\sin A\cos B-\cos A\sin B}{\cos A\cos B}$$

$$=\frac{\sin A\cos B}{\cos A\cos B}-\frac{\cos A\sin B}{\cos A\cos B}=\tan A-\tan B.$$

উদা. 5. Prove that (*i*) $\sin(A+B)\sin(A-B)=\sin^2 A-\sin^2 B$
$=\cos^2 B-\cos^2 A.$

and (*ii*) $\cos(A+B)\cos(A-B)=\cos^2 A-\sin^2 B$
$=\cos^2 B-\sin^2 A.$

(*i*) $\sin(A+B)\sin(A-B)$

$=(\sin A\cos B+\cos A\sin B)(\sin A\cos B-\cos A\sin B)$

$=\sin^2 A\cos^2 B-\cos^2 A\sin^2 B$

$=\sin^2 A(1-\sin^2 B)-(1-\sin^2 A)\sin^2 B$

$=\sin^2 A-\sin^2 A\sin^2 B-\sin^2 B+\sin^2 A\sin^2 B$

$=\sin^2 A-\sin^2 B$ ...... (*i*)

$=(1-\cos^2 A)-(1-\cos^2 B)=\cos^2 B-\cos^2 A$ ...... (*ii*)

(*ii*) $\cos(A+B)\cos(A-B)$

$=(\cos A\cos B-\sin A\sin B)(\cos A\cos B+\sin A\sin B)$

$=\cos^2 A\cos^2 B-\sin^2 A\sin^2 B$

$=\cos^2 A(1-\sin^2 B)-(1-\cos^2 A)\sin^2 B$

$=\cos^2 A-\cos^2 A\sin^2 B-\sin^2 B+\cos^2 A\sin^2 B$

$=\cos^2 A-\sin^2 B$ ...(*i*)

$=(1-\sin^2 A)-(1-\cos^2 B)=\cos^2 B-\sin^2 A.$ ...... (*ii*)

উদা. 6. Prove that

$\sin(A+B)\cos B-\cos(A+B)\sin B=\sin A$

$\sin(A+B)\cos B-\cos(A+B)\sin B$

$=\sin x\cos B-\cos x\sin B$ [A + B-এর পরিবর্তে x ধরিয়া]

$=\sin(x-B)$

$=\sin(A+B-B)$

$=\sin A.$

7. Prove that $\tan A+\tan B=\dfrac{\sin(A+B)}{\cos A\cos B}$

$$\tan A+\tan B=\frac{\sin A}{\cos A}+\frac{\sin B}{\cos B}=\frac{\sin A\cos B+\cos A\sin B}{\cos A\cos B}$$

$$=\frac{\sin(A+B)}{\cos A\cos B}.$$

8. If $\sin A\sin B-\cos A\cos B+1=0$, show that

$1+\cot A\tan B=0$

$\sin A\sin B-\cos A\cos B+1=0$

$\therefore\ 1=\cos A\cos B-\sin A\sin B=\cos(A+B)$

$\therefore\ \sin(A+B)=\sqrt{1-\cos^2(A+B)}=\sqrt{1-1}=0$

or, $\sin A\cos B+\cos A\sin B=0$

উভয় পক্ষকে $\sin A\cos B$ দ্বারা ভাগ করিয়া,

$1+\cot A\tan B=0.$

9. Prove that $1+\tan 2A\tan A=\sec 2A.$

$$1+\tan 2A\tan A=1+\frac{\sin 2A}{\cos 2A}\cdot\frac{\sin A}{\cos A}$$

$$=\frac{\cos 2A\cos A+\sin 2A\sin A}{\cos 2A\cos A}$$

$$=\frac{\cos(2A-A)}{\cos 2A\cos A}=\frac{1}{\cos 2A}=\sec 2A.$$

10. Prove that $\cos^2(A-B)+\cos^2 B-2\cos(A-B)\cos A\cos B = \sin^2 A.$

L. H. S.

$=\cos^2(A-B)-2\cos(A-B)\cos A\cos B+\cos^2 B$

$=\{\cos(A-B)-\cos A\cos B\}^2-\cos^2 A\cos^2 B+\cos^2 B$

$=\{\cos A\cos B+\sin A\sin B-\cos A\cos B\}^2+\cos^2 B(1-\cos^2 A)$

$=\sin^2 A\sin^2 B+\cos^2 B\sin^2 A$

$=\sin^2 A(\sin^2 B+\cos^2 B)=\sin^2 A.1=\sin^2 A.$

11. If $A+B+C=\pi$ and $\cos A=\cos B\cos C$, show that

$$\tan A=\tan B+\tan C$$

$A=\pi-(B+C)$

$\therefore\ \sin A=\sin\{\pi-(B+C)\}$

$=\sin(B+C)=\sin B\cos C+\cos B\sin C$

$\cos A=\cos B\cos C$

$\therefore\ \tan A=\dfrac{\sin A}{\cos A}=\dfrac{\sin B\cos C+\cos B\sin C}{\cos B\cos C}$

$=\dfrac{\sin B}{\cos B}+\dfrac{\sin C}{\cos C}=\tan B+\tan C.$

প্রশ্নমালা 3

1. Find the simplest value of

   $(\sin A\cos B+\cos A\sin B)^2+(\cos A\cos B-\sin A\sin B)^2.$

   (C. U. 1892)

2. Prove that $\cos A+\cos(120°-A)+\cos(120°+A)=0.$

   (C. U. Int. 1917, 1953)

3. Prove that $\dfrac{\sin(A-B)}{\sin A\sin B}+\dfrac{\sin(B-C)}{\sin B\sin C}+\dfrac{\sin(C-A)}{\sin C\sin A}=0.$

   (A. U. 1938)

4. Prove that $\frac{\sin(A-B)}{\cos A \cos B}+\frac{\sin(B-C)}{\cos B \cos C}+\frac{\sin(C-A)}{\cos C \cos A}=0.$

5. Prove that $\frac{\cos A+\sin A}{\cos A-\sin A}=\tan(45^\circ+A).$

6. Prove that $\sin(A-45^\circ)+\cos(A+45^\circ)=0$

7. Prove that $\frac{\tan(\alpha-\beta)+\tan\beta}{1-\tan(\alpha-\beta)\tan\beta}=\tan\alpha.$

8. Simplify $\cos 26^\circ 40' \sin 56^\circ 40' - \cos 63^\circ 20' \sin 33^\circ 20'.$

9. Prove that

(i) $\tan\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)=\frac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}$

(ii) $\tan\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)=\frac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}$

10. Prove that $\cot A-\cot 2A=\operatorname{cosec} 2A.$

11. Prove that $\cos A\cos(B-A)-\sin A\sin(B-A)=\cos B.$

12. Show that

$\cos\frac{1}{2}(\phi-\theta)-\sin\theta\sin\frac{1}{2}(\phi+\theta)=\cos\theta\cos\frac{1}{2}(\phi+\theta).$

13. If $A+B=C$, show that $\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C$

$=1+2\cos A\cos B\cos C.$ (C. U. Int. 1914)

14. Show that $\cot 2A+\tan A=\operatorname{cosec} 2A.$ (C. U. Int. 1947)

15. Show that $\tan(A+B)\tan(A-B)=\frac{\sin^2 A-\sin^2 B}{\cos^2 A-\sin^2 B}.$

(C. U. 1944)

16. Prove that $\cos^2 A+\cos^2\left(A+\frac{\pi}{3}\right)+\cos^2\left(A-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3}{2}$

17. If $\cos(A+B)\sin(C+D)=\cos(A-B)\sin(C-D)$,

show that $\cot A\cot B\cot C=\cot D.$ (C. U. Int. 1930)

18. Prove that $(\sin A\cos B+\cos A\sin B)^2$

$+(\cos A\cos B-\sin A\sin B)^2=1$

19. If $\tan A = \frac{m}{m+1}$, and $\tan B = \frac{1}{2m+1}$,

prove that $\tan(A+B) = 1$.

20. Eliminate A and B from the equations,

$$\cot A + \cot B = a$$

$$\tan A + \tan B = b$$

$$A + B = \theta.$$

21. Prove that $\sin 105° + \cos 105° = \cos 45°$.

22. Prove that $\tan^2 A - \tan^2 B = \frac{\sin(A+B)\sin(A-B)}{\cos^2 A \cos^2 B}$

23. If $\sin \alpha \sin \beta - \cos \alpha \cos \beta + 1 = 0$,

show that $1 + \cot \alpha \tan \beta = 0$. (C. U. 1932)

24. Prove that $1 + \tan \theta \tan \frac{\theta}{2} = \sec \theta$

25. If $\sin(A+B) = n \sin(A-B)$ and $n \neq -1$, prove that

$\tan A = \frac{n+1}{n-1} \tan B$.

চতুর্থ অধ্যায়

ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের গুণফল এবং সমষ্টি বা অন্তরের পরস্পর রূপান্তর

(Transformation of Products and Sums)

1. গুণফলকে সমষ্টি বা অন্তররূপে প্রকাশ।

তৃতীয় অধ্যায়ে প্রমাণ করা হইয়াছে যে,

$\sin A \cos B + \cos A \sin B = \sin (A+B) \cdots\cdots$ (i)

$\sin A \cos B - \cos A \sin B = \sin (A-B) \cdots\cdots$ (ii)

$\cos A \cos B - \sin A \sin B = \cos (A+B) \cdots\cdots$ (iii)

$\cos A \cos B + \sin A \sin B = \cos (A-B) \ldots\ldots$ (iv)

(i) এবং (ii) যোগ করিয়া, $2 \sin A \cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B) \cdots\cdots$ I

(i) হইতে (ii) বিয়োগ করিয়া, $2 \cos A \sin B$

$= \sin (A+B) - \sin (A-B) \cdots\cdots$ II

(iii) এবং (iv) যোগ করিয়া, $2 \cos A \cos B$

$= \cos (A+B) + \cos (A-B) \cdots\cdots$ III

(iv) হইতে (iii) বিয়োগ করিয়া, $2 \sin A \sin B$

$= \cos (A-B) - \cos (A+B) \cdots\cdots$ IV

2. সমষ্টি বা অন্তরকে গুণফল আকারে প্রকাশ।

প্রমাণ করা হইয়াছে যে

$\sin (A+B) + \sin (A-B) = 2 \sin A \cos B \quad \cdots \quad \cdots \quad$ (i)

$\sin (A+B) - \sin (A-B) = 2 \cos A \sin B \quad \cdots \quad \cdots \quad$ (ii)

$\cos (A+B) + \cos (A-B) = 2 \cos A \cos B \quad \cdots \quad \cdots \quad$ (iii)

এবং $\cos (A-B) - \cos (A+B) = 2 \sin A \sin B. \quad \cdots \quad \cdots \quad$ (iv)

এখন $A+B=C$ এবং $A-B=D$ ধরিলে,

$$(A+B)+(A-B)=C+D \text{ বা } 2A=C+D \quad \therefore \quad A=\frac{C+D}{2},$$

এবং $(A+B)-(A-B)=C-D$ বা $2B=C-D \quad \therefore \quad B=\frac{C-D}{2}.$

(i), (ii), (iii), (iv) এ A-এ B-র উক্ত মান বসাইয়া পাওয়া যায়—

$$\sin C+\sin D=2\sin\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2} \quad \cdots\cdots (i)$$

$$\sin C-\sin D=2\cos\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2} \quad \cdots\cdots (ii)$$

$$\cos C+\cos D=2\cos\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2} \quad \cdots\cdots (iii)$$

$$\cos C-\cos D=2\sin\frac{C+D}{2}\sin\frac{D-C}{2} \quad \cdots\cdots (iv)*$$

[* $\cos C-\cos D=-(\cos D-\cos C)$

$$=-2\sin\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2}$$

$$=2\sin\frac{C+D}{2}\cdot\left(-\sin\frac{C-D}{2}\right)$$

$$=2\sin\frac{C+D}{2}\sin\frac{D-C}{2}$$]

উদা. 1. Prove that

(i) $\sin 4A+\sin 2A=2\sin 3A\cos A$

(ii) $\sin 4A-\sin 2A=2\cos 3A\sin A$

(iii) $\cos 4A+\cos 2A=2\cos 3A\cos A$

(iv) $\cos 3A-\cos 5A=2\sin 4A\sin A$

(i) $$\sin 4A+\sin 2A=2\sin\frac{4A+2A}{2}\cos\frac{4A-2A}{2}$$

$$=2\sin 3A\cos A$$

(*ii*) $\sin 4A - \sin 2A = 2\cos\frac{4A+2A}{2}\sin\frac{4A-2A}{2}$

$= 2\cos 3A \sin A$

(*iii*) $\cos 4A + \cos 2A = 2\cos\frac{4A+2A}{2}\cos\frac{4A-2A}{2}$

$= 2\cos 3A\cos A$

(*iv*) $\cos 3A - \cos 5A = 2\sin\frac{3A+5A}{2}\sin\frac{5A-3A}{2}$

$= 2\sin 4A\sin A$

উদা. 2. Prove that

(*i*) $2\sin 5\theta\cos 3\theta = \sin 8\theta + \sin 2\theta$

(*ii*) $2\cos 5\theta\sin 3\theta = \sin 8\theta - \sin 2\theta$

(*iii*) $2\cos 5\theta\cos 3\theta = \cos 8\theta + \cos 2\theta$

(*iv*) $2\sin 5\theta\sin 3\theta = \cos 2\theta - \cos 8\theta$

(*i*) $2\sin 5\theta\cos 3\theta = \sin(5\theta+3\theta) + \sin(5\theta-3\theta)$

$= \sin 8\theta + \sin 2\theta$

(*ii*) $2\cos 5\theta\sin 3\theta = \sin(5\theta+3\theta) - \sin(5\theta-3\theta)$

$= \sin 8\theta - \sin 2\theta$

(*iii*) $2\cos 5\theta\cos 3\theta = \cos(5\theta+3\theta) + \cos(5\theta-3\theta)$

$= \cos 8\theta + \cos 2\theta$

(*iv*) $2\sin 5\theta\sin 3\theta = \cos(5\theta-3\theta) - \cos(5\theta+3\theta)$

$= \cos 2\theta - \cos 8\theta$

উদা. 3. Prove that

$\cos 55^\circ + \cos 65^\circ + \cos 175^\circ = 0$ (C. U. Int. 1876)

$\cos 55^\circ + \cos 65^\circ + \cos 175^\circ$

$= 2\cos\frac{55^\circ+65^\circ}{2}\cos\frac{65^\circ-55^\circ}{2} + \cos(180^\circ - 5^\circ)$

$= 2\cos 60^\circ\cos 5^\circ - \cos 5^\circ = 2.\frac{1}{2}.\cos 5^\circ - \cos 5^\circ$

$= \cos 5^\circ - \cos 5^\circ = 0$

উদা. 4. Prove that

$$\sin\frac{11\theta}{4}\sin\frac{\theta}{4}+\sin\frac{7\theta}{4}\sin\frac{3\theta}{4}=\sin 2\theta\sin\theta \qquad \text{(C. U. Int. 1904)}$$

$$\text{L. H. S.}=\tfrac{1}{2}\left\{2\sin\frac{11\theta}{4}\sin\frac{\theta}{4}+2\sin\frac{7\theta}{4}\sin\frac{3\theta}{4}\right\}$$

$$=\tfrac{1}{2}\left\{\cos\left(\frac{11\theta}{4}-\frac{\theta}{4}\right)-\cos\left(\frac{11\theta}{4}+\frac{\theta}{4}\right)\right.$$

$$\left.\frac{7\theta}{4}-\frac{3\theta}{4}\right)-\cos\left(\frac{7\theta}{4}+\frac{3\theta}{4}\right)\Big\}$$

$$=\tfrac{1}{2}\left\{\cos\frac{5\theta}{2}-\cos 3\theta+\cos\theta-\cos\frac{5\theta}{2}\right\}$$

$$=\tfrac{1}{2}\{\cos\theta-\cos 3\theta\}$$

$$=\tfrac{1}{2}\left\{2\sin\frac{\theta+3\theta}{2}\sin\frac{3\theta-\theta}{2}\right\}$$

$$=\tfrac{1}{2}.\,2\sin 2\theta.\,\sin\theta=\sin 2\theta.\,\sin\theta=\text{R. H. S.}$$

উদা. 5. Prove that

$$\frac{\sin A-\sin B}{\sin A+\sin B}=\tan\frac{A-B}{2}\cot\frac{A+B}{2} \qquad \text{(C. U. 1878)}$$

$$\frac{\sin A-\sin B}{\sin A+\sin B}=\frac{2\sin\frac{A-B}{2}\cos\frac{A+B}{2}}{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}=\tan\frac{A-B}{2}\cot\frac{A+B}{2}$$

উদা. 6. Prove that

$$\tan 4A=\frac{\sin A\sin 2A+\sin 2A\sin 5A}{\sin A\cos 2A+\sin 2A\cos 5A}$$

$$\text{R. H. S.}=\frac{2(\sin A\sin 2A+\sin 2A\sin 5A)}{2(\sin A\cos 2A+\sin 2A\cos 5A)}$$

$$=\frac{2\sin 2A\sin A+2\sin 5A\sin 2A}{2\cos 2A\sin A+2\cos 5A\sin 2A}$$

$$=\frac{\{\cos(2A-A)-\cos(2A+A)\}+\{(\cos 5A-2A)-\cos(5A+2A)}{\{\sin(2A+A)-\sin(2A-A)\}+\{\sin(5A+2A)-\sin(5A-2A)}$$

$$=\frac{\cos A-\cos 3A+\cos 3A-\cos 7A}{\sin 3A-\sin A+\sin 7A-s}$$

(ii) $\sin 4A - \sin 2A = 2\cos\frac{4A+2A}{2}\sin\frac{4A-2A}{2}$

$= 2\cos 3A \sin A$

(iii) $\cos 4A + \cos 2A = 2\cos\frac{4A+2A}{2}\cos\frac{4A-2A}{2}$

$= 2\cos 3A \cos A$

(iv) $\cos 3A - \cos 5A = 2\sin\frac{3A+5A}{2}\sin\frac{5A-3A}{2}$

$= 2\sin 4A \sin A$

উদা. 2. Prove that

(i) $2\sin 5\theta \cos 3\theta = \sin 8\theta + \sin 2\theta$

(ii) $2\cos 5\theta \sin 3\theta = \sin 8\theta - \sin 2\theta$

(iii) $2\cos 5\theta \cos 3\theta = \cos 8\theta + \cos 2\theta$

(iv) $2\sin 5\theta \sin 3\theta = \cos 2\theta - \cos 8\theta$

(i) $2\sin 5\theta \cos 3\theta = \sin(5\theta+3\theta) + \sin(5\theta-3\theta)$

$= \sin 8\theta + \sin 2\theta$

(ii) $2\cos 5\theta \sin 3\theta = \sin(5\theta+3\theta) - \sin(5\theta-3\theta)$

$= \sin 8\theta - \sin 2\theta$

(iii) $2\cos 5\theta \cos 3\theta = \cos(5\theta+3\theta) + \cos(5\theta-3\theta)$

$= \cos 8\theta + \cos 2\theta$

(iv) $2\sin 5\theta \sin 3\theta = \cos(5\theta-3\theta) - \cos(5\theta+3\theta)$

$= \cos 2\theta - \cos 8\theta$

উদা. 3. Prove that

$\cos 55^\circ + \cos 65^\circ + \cos 175^\circ = 0$ (C. U. Int. 1876)

$\cos 55^\circ + \cos 65^\circ + \cos 175^\circ$

$= 2\cos\frac{55^\circ+65^\circ}{2}\cos\frac{65^\circ-55^\circ}{2} + \cos(180^\circ - 5^\circ)$

$= 2\cos 60^\circ \cos 5^\circ - \cos 5^\circ = 2.\frac{1}{2}.\cos 5^\circ - \cos 5^\circ$

$= \cos 5^\circ - \cos 5^\circ = 0$

উদা. 4. Prove that

$$\sin\frac{11\theta}{4}\sin\frac{\theta}{4}+\sin\frac{7\theta}{4}\sin\frac{3\theta}{4}=\sin 2\theta\sin\theta \quad \text{(C. U. Int. 1904)}$$

$$\text{L. H. S.}=\tfrac{1}{2}\left\{2\sin\frac{11\theta}{4}\sin\frac{\theta}{4}+2\sin\frac{7\theta}{4}\sin\frac{3\theta}{4}\right\}$$

$$=\tfrac{1}{2}\left\{\cos\left(\frac{11\theta}{4}-\frac{\theta}{4}\right)-\cos\left(\frac{11\theta}{4}+\frac{\theta}{4}\right)+\cos\left(\frac{7\theta}{4}-\frac{3\theta}{4}\right)-\cos\left(\frac{7\theta}{4}+\frac{3\theta}{4}\right)\right\}$$

$$=\tfrac{1}{2}\left\{\cos\frac{5\theta}{2}-\cos 3\theta+\cos\theta-\cos\frac{5\theta}{2}\right\}$$

$$=\tfrac{1}{2}\{\cos\theta-\cos 3\theta\}$$

$$=\tfrac{1}{2}\left\{2\sin\frac{\theta+3\theta}{2}\sin\frac{3\theta-\theta}{2}\right\}$$

$$=\tfrac{1}{2}.\,2\sin 2\theta.\,\sin\theta=\sin 2\theta.\,\sin\theta=\text{R. H. S.}$$

উদা. 5. Prove that

$$\frac{\sin A-\sin B}{\sin A+\sin B}=\tan\frac{A-B}{2}\cot\frac{A+B}{2} \quad \text{(C. U. 1878)}$$

$$\frac{\sin A-\sin B}{\sin A+\sin B}=\frac{2\sin\frac{A-B}{2}\cos\frac{A+B}{2}}{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}=\tan\frac{A-B}{2}\cot\frac{A+B}{2}$$

উদা. 6. Prove that

$$\tan 4A=\frac{\sin A\sin 2A+\sin 2A\sin 5A}{\sin A\cos 2A+\sin 2A\cos 5A}$$

$$\text{R. H. S.}=\frac{2(\sin A\sin 2A+\sin 2A\sin 5A)}{2(\sin A\cos 2A+\sin 2A\cos 5A)}$$

$$=\frac{2\sin 2A\sin A+2\sin 5A\sin 2A}{2\cos 2A\sin A+2\cos 5A\sin 2A}$$

$$=\frac{\{\cos(2A-A)-\cos(2A+A)\}+\{(\cos(5A-2A)-\cos(5A+2A)\}}{\{\sin(2A+A)-\sin(2A-A)\}+\{\sin(5A+2A)-\sin(5A-2A)\}}$$

$$=\frac{\cos A-\cos 3A+\cos 3A-\cos 7A}{\sin 3A-\sin A+\sin 7A-s}$$

$$\frac{\cos A - \cos 7A}{\sin 7A - \sin A} = \frac{2 \sin \frac{7A+A}{2} \sin \frac{7A-A}{2}}{2 \cos \frac{7A+A}{2} \sin \frac{7A-A}{2}}$$

$$= \frac{\sin 4A}{\cos 4A} = \tan 4A.$$

উদা. 7. Prove that

$$\frac{\cos 18° + \sin 18°}{\cos 18° - \sin 18°} = \tan 63°$$

$$\sin 18° = \sin (90° - 72°) = \cos 72°$$

$$\therefore \frac{\cos 18° + \sin 18°}{\cos 18° - \sin 18°} = \frac{\cos 18° + \cos}{\cos 18° - \cos 72°}$$

$$= \frac{2 \cos \frac{72° + 18°}{2} \cos \frac{72° - 18°}{2}}{2 \sin \frac{72° + 18°}{2} \sin \frac{72° - 18°}{2}}$$

$$= \frac{\cos 45° \cos 27°}{\sin 45° \sin 27°} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} \cos 27°}{\frac{1}{\sqrt{2}} \sin 27°} = \cot 27° = \tan 63°$$

প্রশ্নমালা 4

1. Express $\cos 2\theta - \cos 4\theta$ as the product of two sines.
2. Prove that
   (i) $\sin 7\theta + \sin 3\theta = 2 \sin 5\theta \cos 2\theta$
   (ii) $\sin 7\theta - \sin 3\theta = 2 \cos 5\theta \sin 2\theta$
   (iii) $\cos 9\theta + \cos 7\theta = 2 \cos 8\theta \cos \theta$
   (iv) $\cos 9\theta - \cos 7\theta = -2 \sin 8\theta \sin \theta$
3. Prove that
   (i) $2 \sin 60° \cos 45° = \sin 105° + \sin 15°$
   (ii) $2 \cos 60° \sin 45° = \sin 105° - \sin 15°$
   (iii) $2 \cos 60° \cos 45° = \cos 105° + \cos 15°$
   (iv) $2 \sin 60° \sin 45° = \cos 15° - \cos 105°$

4. Prove that $4 \sin 23^\circ \sin 37^\circ \sin 83^\circ = \cos 21^\circ$

5. Find the value of $\sin 75^\circ + \sin 15^\circ$

6. Prove that (*i*) $\sin 10^\circ + \sin 50^\circ - \sin 70^\circ = 0$

(*ii*) $\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ = \frac{1}{8}$

7. Prove that $2 \cos \frac{90^\circ + A}{2} \cos \frac{90^\circ - A}{2} = \cos A$

8. Prove that $\frac{\cos 75^\circ + \cos 15^\circ}{\sin 75^\circ - \sin 15^\circ} = \sqrt{3}$

9. Prove that $\frac{(\cos A - \cos 3A)(\sin 8A + \sin 2A)}{(\sin 5A - \sin A)(\cos 4A - \cos 6A)} = 1$

10. Prove that $\sin (B + C - A) + \sin (C + A - B)$
$+ \sin (A + B - C) - \sin (A + B + C) = 4 \sin A \sin B \sin C$

11. Prove that $\frac{\sin A + \sin 3A + \sin 5A + \sin 7A}{\cos A + \cos 3A + \cos 5A + \cos 7A} = \tan 4A$

12. Simplify : $\sin (A - D) \sin (B - C) + \sin (B - D) \sin (C - A)$
$+ \sin (C - D) \sin (A - B)$

13. Reduce $\frac{\cos 2A - \cos 4A}{\sin 4A - \sin 2A}$ to a single trigonometrical function.

14. Simplify : $\frac{\sin 95^\circ + \sin 25^\circ}{\cos 95^\circ + \cos 25^\circ}$

15. Prove that $\frac{\cos 9^\circ + \sin 9^\circ}{\cos 9^\circ - \sin 9^\circ} = \tan 54^\circ$

16. Prove that $\frac{\cos 12^\circ + \sin 12^\circ}{\cos 12^\circ - \sin 12^\circ} = \tan 57^\circ$

17. Prove that $\cos (A + B + C) + \cos (A - B - C)$
$+ \cos (A + B - C) + \cos (A - B + C)$
$= 4 \cos A \cos B \cos C$

18. Prove that $\cos (A + B + C) + \cos A + \cos B + \cos C$
$= 4 \cos \frac{B + C}{2} \cos \frac{C + A}{2} \cos \frac{A + B}{2}$

19. Prove that $\cos 2A + \cos 4A + \cos 6A + \cos 8A$
$= 4 \cos A \cos 2A \cos 5A$

20. Prove that $\frac{\cos A + \cos 2A + \cos 4A + \cos 5A}{\sin A + \sin 2A + \sin 4A + \sin 5A} = \cot 3A$.

পঞ্চম অধ্যায়

গুণিতক কোণ

(Multiple angles)

1. 2A কোণ

পূর্বে প্রমাণ করা হইয়াছে যে,

$\sin (A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$

$\cos (A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$

$\tan (A+B) = \dfrac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$

এখন ধর $B = A$; তাহা হইলে,

$$\sin 2A = \sin (A+A) = \sin A \cos A + \cos A \sin A = 2 \sin A \cos A$$

$$\begin{aligned} \cos 2A = \cos (A+A) &= \cos A \cos A - \sin A \sin A \\ &= \cos^2 A - \sin^2 A \quad \cdots (i) \\ &= \cos^2 A - (1 - \cos^2 A) \\ &= 2 \cos^2 A - 1 \quad \cdots\cdots (ii) \\ &= 2(1 - \sin^2 A) - 1 \\ &= 1 - 2 \sin^2 A \quad \cdots\cdots (iii) \end{aligned}$$

$$\tan 2A = \tan (A+A) = \frac{\tan A + \tan A}{1 - \tan A . \tan A} = \frac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A}$$

অনুসিদ্ধান্ত 1. যেহেতু $\cos 2A = 2 \cos^2 A - 1$

$\therefore \quad 2 \cos^2 A = 1 + \cos 2A \qquad \therefore \quad \cos^2 A = \frac{1}{2} (1 + \cos 2A)$

আবার যেহেতু $\cos 2A = 1 - 2 \sin^2 A$

$\therefore \quad 2 \sin^2 A = 1 - \cos 2A \qquad \therefore \quad \sin^2 A = \frac{1}{2}(1 - \cos 2A).$

অনুসিদ্ধান্ত 2. $\cos 2A = 1 - 2\sin^2 A$ $\quad 1 - \cos 2A = 2\sin^2 A$

$\cos 2A = 2\cos^2 A - 1$ $\quad 1 + \cos 2A = 2\cos^2 A$

$$\frac{1-\cos 2A}{1+\cos 2A} = \frac{2\sin^2 A}{2\cos^2 A} = \tan^2 A.$$

2. Sin 2A এবং cos 2Aকে 'tan A'—সম্বলিত পদে প্রকাশ

$$\sin 2A = 2\sin A\cos A = \frac{2\sin A\cos A.\cos A}{\cos A}$$

$$= 2\tan A.\cos^2 A = \frac{2\tan A}{\sec^2 A}$$

$$= \frac{2\tan A}{1+\tan^2 A}.$$

$$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A.$$

$$= \cos^2 A - \cos^2 A.\frac{\sin^2 A}{\cos^2 A}.$$

$$= \cos^2 A - \cos^2 A.\tan^2 A.$$

$$= \cos^2 A\,(1 - \tan^2 A)$$

$$= \frac{1}{\sec^2 A}(1 - \tan^2 A)$$

$$= \frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}.$$

3. 3A কোণ।

$$\sin 3A = \sin(A + 2A)$$

$$= \sin A\cos 2A + \cos A\sin 2A.$$

$$= \sin A\,(1 - 2\sin^2 A) + \cos A.(2\sin A\cos A)$$

$$= \sin A - 2\sin^3 A + 2\sin A\cos^2 A$$

$$= \sin A - 2\sin^3 A + 2\sin A\,(1 - \sin^2 A)$$

$$= 3\sin A - 4\sin^3 A$$

$$\cos 3A = \cos(A + 2A)$$
$$= \cos A \cos 2A - \sin A \sin 2A$$
$$= \cos A\,(2\cos^2 A - 1) - \sin A.\,(2 \sin A \cos A)$$
$$= 2\cos^3 A - \cos A - 2\sin^2 A \cos A$$
$$= 2\cos^3 A - \cos A - 2(1 - \cos^2 A)\cos A$$
$$= \mathbf{4\cos^3 A - 3\cos A}.$$

$$\tan 3A = \tan(A + 2A)$$
$$= \frac{\tan A + \tan 2A}{1 - \tan A \tan 2A}$$
$$= \frac{\tan A + \dfrac{2\tan A}{1 - \tan^2 A}}{1 - \tan A.\dfrac{2\tan A}{1 - \tan^2 A}}$$
$$= \frac{\tan A - \tan^3 A + 2\tan A}{1 - \tan^2 A - 2\tan^2 A}$$
$$= \frac{3\tan A - \tan^3 A}{\mathbf{1 - 3\tan^2 A}}.$$

উদা. 1. If $\sin\theta = \frac{4}{5}$, find the value of $\sin 2\theta$.

$$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta = 1 - \tfrac{16}{25} = \tfrac{9}{25}$$
$$\therefore \quad \cos\theta = \pm\tfrac{3}{5}$$
$$\therefore \quad \sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$
$$= 2.\tfrac{4}{5}.\pm\tfrac{3}{5}$$

উদা. 2. If $\cos A = \dfrac{p}{q}$, find the value of $\sin 2A$.

(Punjab, 1921)

$$\sin A = \pm\sqrt{1 - \cos^2 A} = \pm\sqrt{1 - \frac{p^2}{q^2}} = \pm\frac{\sqrt{q^2 - p^2}}{q}$$
$$\therefore \quad \sin 2A = 2\sin A\cos A.$$
$$= 2.\frac{p}{q}.\pm\frac{\sqrt{q^2 - p^2}}{q} = \pm\frac{2p\sqrt{q^2 - p^2}}{q^2}.$$

উদা. 3. Prove that $\dfrac{\cos A-\sin A}{\cos A+\sin A}=\sec 2A-\tan 2A.$

$$\frac{\cos A-\sin A}{\cos A+\sin A}=\frac{(\cos A-\sin A)(\cos A-\sin A)}{(\cos A+\sin A)(\cos A-\sin A)}$$

$$=\frac{(\cos A-\sin A)^2}{\cos^2 A-\sin^2 A}$$

$$=\frac{\cos^2 A+\sin^2 A-2\cos A\sin A}{\cos 2A}$$

$$=\frac{1-2\cos A\sin A}{\cos 2A}=\frac{1-\sin 2A}{\cos 2A}$$

$$=\frac{1}{\cos 2A}-\frac{\sin 2A}{\cos 2A}$$

$$=\sec 2A-\tan 2A.$$

উদা. 4. Prove that $\dfrac{\sin 3A}{\sin A}-\dfrac{\cos 3A}{\cos A}=2.$

$$\frac{\sin 3A}{\sin A}-\frac{\cos 3A}{\cos A}=\frac{\sin 3A\cos A-\cos 3A\sin A}{\sin A\cos A}$$

$$\frac{\sin(3A-A)}{\sin A\cos A}=\frac{\sin 2A}{\sin A\cos A}=\frac{2\sin A\cos A}{\sin A\cos A}=2.$$

উদা. 5. If A and B are acute angles and $\cos 2A=\dfrac{3\cos 2B-1}{3-\cos 2B}$, show that $\tan A=\sqrt{2}\tan B$.

$$\cos 2A=\frac{3\cos 2B-1}{3-\cos 2B}$$

$$\therefore\ \frac{1}{\cos 2A}=\frac{3-\cos 2B}{3\cos 2B-1}$$

$$\therefore\ \frac{1-\cos 2A}{1+\cos 2A}=\frac{4-4\cos 2B}{2+2\cos 2B}=\frac{2(1-\cos 2B)}{1+\cos 2B}$$

8. Prove that $(2 \cos A + 1)(2 \cos A - 1) = 2 \cos 2A + 1$.

9. If $\tan \theta = \dfrac{x}{y}$, show that $x \sin 2\theta + y \cos 2\theta = y$.

10. Express $\tan 4A$ in terms of $\tan A$.

11. Prove that $\tan A = \cot A - 2 \cot 2A$.

12. Prove that $\dfrac{1 + \cos 2A}{\sin 2A} = \cot A$.

13. Prove that $\dfrac{\cos A + \sin A}{\cos A - \sin A} = \sec 2A + \tan 2A$.

14. Prove that $4 \cos^6 A + \sin^6 A = 4 - 3 \sin^2 2A$.

15. Prove that

$$\frac{1 + \tan^2\left(\frac{\pi}{4} - A\right)}{1 - \tan^2\left(\frac{\pi}{4} - A\right)} = \operatorname{cosec} 2A.$$

16 Prove that $\dfrac{\cos A - \sqrt{1 + \sin 2A}}{\sin A - \sqrt{1 + \sin 2A}} = \tan A$.

17. Prove that

$$\frac{\cot^4 \frac{A}{2} - 1}{\cot^4 \frac{A}{2} + 1} = \frac{2 \cos A}{1 + \cos^2 A}.$$

18. Prove that $\dfrac{\sec 8A - 1}{\sec 4A - 1} = \dfrac{\tan 8A}{\tan 2A}$.

19. If $\tan \theta = \dfrac{-1 + \sqrt{1 + c^2}}{c}$, find $\tan 2\theta$ and $\tan 4\theta$.

20. If $2 \tan \alpha = 3 \tan \beta$, show that

$$\tan (\alpha - \beta) = \frac{\sin 2\beta}{5 - \cos 2\beta}$$ (C. U. Int. 1946)

ষষ্ঠ অধ্যায়

কোণাংশ

(Sub-multiple angles)

1. A কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতকে $\frac{A}{2}$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতরূপে প্রকাশ।

•পূর্বে প্রমাণ করা হইয়াছে যে

$$\sin 2A = 2 \sin A \cos A$$

$$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$$
$$= 2\cos^2 A - 1 = 1 - 2\sin^2 A.$$

$$\tan 2A = \frac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A}.$$

$$1 + \cos 2A = 2\cos^2 A;\ 1 - \cos 2A = 2\sin^2 A;$$

$$\frac{1 - \cos 2A}{1 + \cos 2A} = \tan^2 A.$$

এখন, $A = 2.\frac{A}{2}$ ধরিলে,

$$\sin A = \sin 2.\frac{A}{2} = 2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}$$

$$\cos A = \cos 2.\frac{A}{2} = \cos^2 \frac{A}{2} - \sin^2 \frac{A}{2}$$

$$= 2\cos^2 \frac{A}{2} - 1$$

$$= 1 - 2\sin^2 \frac{A}{2}$$

$$\tan A = \tan 2.\frac{A}{2} = \frac{2 \tan \frac{A}{2}}{1 - \tan^2 \frac{A}{2}}.$$

$$1+\cos A = 1+\cos 2.\frac{A}{2} = 2\cos^2\frac{A}{2}$$

$$1-\cos A = 1-\cos 2.\frac{A}{2} = 2\sin^2\frac{A}{2}$$

$$\frac{1-\cos A}{1+\cos A} = \frac{1-\cos 2.\frac{A}{2}}{1+\cos 2.\frac{A}{2}} = \frac{2\sin^2\frac{A}{2}}{2\cos^2\frac{A}{2}} = \tan^2\frac{A}{2}.$$

2. A কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতকে $\frac{A}{3}$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতরূপে প্রকাশ।

পূর্বে প্রমাণ করা হইয়াছে যে,

$$\sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A$$

$$\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A$$

$$\tan 3A = \frac{3\tan A - \tan^3 A}{1-3\tan^2 A}$$

এখন $A = 3.\frac{A}{3}$ ধরিলে,

$$\sin A = \sin 3.\frac{A}{3} = 3\sin\frac{A}{3} - 4\sin^3\frac{A}{3}$$

$$\cos A = 4\cos^3\frac{A}{3} - 3\cos\frac{A}{3}$$

$$\tan A = \frac{3\tan\frac{A}{3} - \tan^3\frac{A}{3}}{1-3\tan^2\frac{A}{3}}.$$

3. $\sin A$ এবং $\cos A$ কে $\tan\frac{A}{2}$ দ্বারা প্রকাশ

পূর্বে প্রমাণিত হইয়াছে যে,

$$\sin 2A = \frac{2\tan A}{1+\tan^2 A}$$

এবং $$\cos 2A = \frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$$

এখন $A = 2.\frac{A}{2}$ ধরিলে,

$$\sin A = \sin 2.\frac{A}{2} = \frac{2\tan\frac{A}{2}}{1+\tan^2\frac{A}{2}}$$

এবং $$\cos A = \cos 2.\frac{A}{2} = \frac{1-\tan^2\frac{A}{2}}{1+\tan^2\frac{A}{2}}.$$

4. $\sin\frac{A}{2}, \cos\frac{A}{2}, \tan\frac{A}{2}, \ldots\ldots$কে $\cos A$ দ্বারা প্রকাশ।

পূর্বে প্রমাণ করা হইয়াছে যে,

$1-\cos A = 2\sin^2\frac{A}{2}$ এবং $1+\cos A = 2\cos^2\frac{A}{2}$

$$\sin\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}} \text{ এবং } \cos\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}$$

$$\therefore \tan\frac{A}{2} = \frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}} = \frac{\pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}}{\pm\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}}$$

এখন $\sin\frac{A}{2}$, $\cos\frac{A}{2}$ এবং $\tan\frac{A}{2}$ এর বিপরীত লইয়া অনায়াসে $\operatorname{cosec}\frac{A}{2}$, $\sec\frac{A}{2}$ এবং $\cot\frac{A}{2}$ এর মান $\cos A$ দ্বারা প্রকাশ করা যায়।

লক্ষ্য করিবার বিষয় $\sin\frac{A}{2}, \cos\frac{A}{2}, \tan\frac{A}{2}, \ldots\ldots$ প্রত্যেকের মান '$\pm$' চিহ্নযুক্ত আছে ; সুতরাং কখন '+' চিহ্নযুক্ত এবং কখন '−' চিহ্নযুক্ত হইবে ইহা নির্ণয় করিতে একটি দ্ব্যর্থক ক্ষেত্রের (Ambiguity) উৎপত্তি হয়। কিন্তু $\frac{A}{2}$ কোণ কোন্ পাদে (Quadrant) অবস্থিত ইহার উপরই '+' বা '−' চিহ্ন নির্ভর করে। সুতরাং $\frac{A}{2}$ কোণ কোন্ পাদে অবস্থিত ইহা নির্ণয় করিয়া '+' বা '−' চিহ্ন বসাইলে কোনও অসুবিধার কারণ থাকে না।

যখন cos A দেওয়া থাকে, A দেওয়া থাকে না তখনই মাত্র দ্ব্যর্থকক্ষেত্র উপস্থিত হয়। কারণ cos A দেওয়া থাকিলে A কোন নির্দিষ্ট পরিমাণের না হইয়া অন্যান্য পরিমাণেরও হইতে পারে।

5. $\sin \frac{A}{2}$ এবং $\cos \frac{A}{2}$ কে $\sin A$ দ্বারা প্রকাশ।

পূর্বে প্রমাণ করা হইয়াছে $2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} = \sin A$

এবং আমরা জানি $\sin^2 \frac{A}{2} + \cos^2 \frac{A}{2} = 1.$

$$\therefore \quad \sin^2 \frac{A}{2} + \cos^2 \frac{A}{2} + 2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} = 1 + \sin A.$$

এবং $\sin^2 \frac{A}{2} + \cos^2 \frac{A}{2} - 2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} = 1 - \sin A.$

অর্থাৎ $\left(\sin \frac{A}{2} + \cos \frac{A}{2}\right)^2 = 1 + \sin A$

এবং $\left(\sin \frac{A}{2} - \cos \frac{A}{2}\right)^2 = 1 - \sin A.$

$$\therefore \quad \sin \frac{A}{2} + \cos \frac{A}{2} = \pm \sqrt{1 + \sin A} \quad \cdots\cdots(i)$$

এবং $\sin \frac{A}{2} - \cos \frac{A}{2} = \pm \sqrt{1 - \sin A} \quad \cdots\cdots(ii)$

(i) এবং (ii) যোগ করিয়া, $2 \sin \frac{A}{2} = \pm \sqrt{1 + \sin A} \pm \sqrt{1 - \sin A}$

(i) হইতে (ii) বিয়োগ করিয়া, $2 \cos \frac{A}{2} = \pm \sqrt{1 + \sin A} \mp \sqrt{1 - \sin A}$

$$\therefore \quad \sin \frac{A}{2} = \frac{1}{2}\left\{ \pm \sqrt{1 + \sin A} \pm \sqrt{1 - \sin A} \right\}$$

$$\cos \frac{A}{2} = \frac{1}{2}\left\{ \pm \sqrt{1 + \sin A} \mp \sqrt{1 - \sin A} \right\}$$

$\sin \frac{A}{2}$-এর মানকে $\cos \frac{A}{2}$-এর মান দ্বারা ভাগ করিয়া $\tan \frac{A}{2}$-এর মান এবং এই তিনটির বিপরীত লইয়া অবশিষ্ট ত্রিকোণমিতিক অনুপাত তিনটির মান সহজেই নির্ণয় করা যায়।

এস্থলে $\sin \frac{A}{2}$, $\cos \frac{A}{2}$-এর মান নির্ণয় করিতে দুইটি দ্ব্যর্থক ক্ষেত্রের উৎপত্তি হয়, কারণ মূলচিহ্ন (radical sign) দুইটির প্রত্যেকটির পূর্বে $\pm$ চিহ্ন বর্তমান। সুতরাং যখন $\sin A$ দেওয়া থাকে, A দেওয়া থাকে না, তখন $\sin \frac{A}{2}$ এবং $\cos \frac{A}{2}$-এর প্রত্যেকের 4টি করিয়া মান হইতে পারে। কিন্তু যখন A দেওয়া থাকে, তখন $\frac{A}{2}$ কোন্ পাদে অবস্থিত ইহা নির্ণয় করিয়া এবং উপরের (*i*) এবং (*ii*) সমীকরণ দ্বয়ের ধনাত্মক ও ঋণাত্মক চিহ্ন বিষয়ে অবহিত হইয়া সমাধান করিলে $\sin \frac{A}{2}$ এবং $\cos \frac{A}{2}$-এর মান $\sin A$ দ্বারা প্রকাশিত হইবে।

6. $\sin \frac{A}{2}$, $\cos \frac{A}{2}$, $\tan \frac{A}{2}$ কে $\tan A$ দ্বারা প্রকাশ।

প্রমাণ করা হইযাছে যে,

$$1-\cos A = 2\sin^2 \frac{A}{2} \cdots\cdots (i)$$

$$1+\cos A = 2\cos^2 \frac{A}{2} \cdots \quad (ii)$$

$$\text{এবং } \tan A = \frac{2\tan\frac{A}{2}}{1-\tan^2\frac{A}{2}} \cdots (iii)$$

(*i*) হইতে, $\sin^2 \frac{A}{2} = \frac{1}{2}(1-\cos A) = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sec A}\right)$

$$= \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\pm\sqrt{1+\tan^2 A}}\right)$$

$$\sin \frac{A}{2} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\left(1-\frac{1}{\pm\sqrt{1+\tan^2 A}}\right)}$$

(*ii*) হইতে, $\cos^2\frac{A}{2}=\frac{1}{2}\;(1+\cos A)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\sec A}\right)$

$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\pm\sqrt{1+\tan^2 A}}\right)$$

$$\therefore\quad \cos\frac{A}{2}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\left(1+\frac{1}{\pm\sqrt{1+\tan^2 A}}\right)}$$

(*iii*) হইতে $\tan A\left(1-\tan^2\frac{A}{2}\right)=2\tan\frac{A}{2}$

or, $1-\tan^2\frac{A}{2}=\frac{2}{\tan A}.\tan\frac{A}{2}$

or, $1=\tan^2\frac{A}{2}+2.\tan\frac{A}{2}.\frac{1}{\tan A}$

or, $1+\frac{1}{\tan^2 A}=\tan^2\frac{A}{2}+2\tan\frac{A}{2}.\frac{1}{\tan A}+\frac{1}{\tan^2 A}$

or, $\frac{1+\tan^2 A}{\tan^2 A}=\left(\tan\frac{A}{2}+\frac{1}{\tan A}\right)^2$

$\therefore\quad \tan\frac{A}{2}+\frac{1}{\tan A}=\pm\frac{\sqrt{1+\tan^2 A}}{\tan A}$

$\therefore\quad \tan\frac{A}{2}=-\frac{1}{\tan A}\pm\frac{\sqrt{1+\tan^2 A}}{\tan A}$

$$=\frac{-1\pm\sqrt{1+\tan^2 A}}{\tan A}$$

এস্থলেও A জানা থাকিলে $\frac{A}{2}$ কোন্ পাদে অবস্থিত নির্ণয় করিয়া, $\sin\frac{A}{2}$, $\cos\frac{A}{2}$ $\tan\frac{A}{2}$ কে $\tan A$ দ্বারা প্রকাশ করিলে কোন দ্ব্যর্থক ক্ষেত্রের উৎপত্তি হয় না যদি $\tan A$-র মান দেওয়া থাকে কিন্তু A-র পরিমাণ দেওয়া না থাকে তবে $\sin\frac{A}{2}$ $\cos\frac{A}{2}$-এর চারিটি মান এবং $\tan\frac{A}{2}$ এর দুইটি মান পাওয়া যায়।

উদা. 1. $\sin 22\frac{1}{2}°$, $\cos 22\frac{1}{2}°$ এবং $\tan 22\frac{1}{2}°$-এর মান নির্ণয় কর

$$\sin 22\tfrac{1}{2}° = \sin \frac{45°}{2}$$

$$\pm\sqrt{\frac{1-\cos 45°}{2}} \qquad \left[\because \sin\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}\right]$$

$$- \sqrt{2}$$

$$= \pm\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}} = \pm\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}$$

$$= \pm\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} = \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

কিন্তু $22\frac{1}{2}°$ প্রথম পাদের কোণ বলিয়া উহার sine ধনাত্মক হইবেই। সুতরাং $\sin 22\frac{1}{2}° = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

$$\cos 22\tfrac{1}{2}° = \cos\frac{45°}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos 45°}{2}} \quad \left[\because \cos\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}\right.$$

$$\frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{2}$$

$$= \pm\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}}$$

$$= \pm\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}} = \pm\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

$$= \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$$

এস্থলেও $22\frac{1}{2}°$ কোণ প্রথম পাদে অবস্থিত বলিয়া উহার cosine, sine ধনাত্মক হইবেই। সুতরাং $\cos 22\frac{1}{2}° = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$

$$\tan 22\tfrac{1}{2}° \;\; \frac{\sin 22\frac{1}{2}°}{\cos 22\frac{1}{2}°} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{(2-\sqrt{2})^2}{4-2}}$$

$$\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \qquad \sqrt{2}-1$$

আবার, $\sin 67\frac{1}{2}° = \sin(90° - 22\frac{1}{2}°) = \cos 22\frac{1}{2}° = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$

$$\cos 67\tfrac{1}{2}° = \cos(90° - 22\tfrac{1}{2}°) = \sin 22\tfrac{1}{2}° = \tfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

উদা 2. *sin 15°, cos 15° ও tan 15° এর মান নির্ণয় কর।*

অনু. 5 (পৃঃ 284) হইতে

$$\sin\frac{A}{2}+\cos\frac{A}{2}=\pm\sqrt{1+\sin A}$$

$$\sin\frac{A}{2}-\cos\frac{A}{2}=\pm\sqrt{1-\sin A}$$

এখন ধর $A=30^\circ$

তাহা হইলে, $\sin 15^\circ+\cos 15^\circ=\sqrt{1+\sin 30}=\sqrt{1+\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

[15° প্রথম পাদের কোণ বলিয়া উহার sine এবং cosine ধনাত্মক সুতরাং ঋণাত্মক চিহ্ন ধরা হয় নাই]

আবার যেহেতু sin 15° এবং cos 15° উভয়ই ধনাত্মক এবং sin 15° হইতে cos 15° বৃহত্তর,

$$\therefore\ \sin 15^\circ-\cos 15^\circ=-\sqrt{1-\sin 30}=-\sqrt{1-\frac{1}{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

অর্থাৎ $\cos 15^\circ-\sin 15^\circ=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

সুতরাং $\sin 15^\circ+\cos 15^\circ=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ ... ... (i)

এবং $\cos 15^\circ-\sin 15^\circ=\frac{1}{\sqrt{2}}$ ... ... (ii)

সুতরাং যোগ ও বিয়োগ করিয়া $2\cos 15^\circ=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}$

এবং $2\sin 15^\circ=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$

$\therefore\ \cos 15^\circ=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$ এবং $\sin 15^\circ=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$

$$\tan 15^\circ=\frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ}=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\times\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$$

$$=\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{(\sqrt{3})^2-(1)^2}=\frac{3+1-2\sqrt{3}}{2}=2-\sqrt{3}$$

দ্রষ্টব্য। '15° = 45° − 30°' ধরিয়া 15° কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত নির্ণয়ের সহজতর প্রণালী পূর্বে (পৃঃ 261, 262) প্রদর্শিত হইয়াছে।

উদা. 3. প্রমাণ কর $\cos 7\frac{1}{2}^\circ = \frac{1}{4}(\sqrt{2}+\sqrt{3}-1)\sqrt{2+\sqrt{2}}$

(Patna U. 1938)

আমরা জানি $2\cos^2\frac{\theta}{2} = 1+\cos\theta$

$\therefore\quad 2\cos^2 7\frac{1}{2}^\circ = 1+\cos 15^\circ = 1+\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}.$

$\therefore\quad \cos^2 7\frac{1}{2}^\circ = \frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}+1}{4\sqrt{2}} = \frac{4+\sqrt{6}+\sqrt{2}}{8}$

কিন্তু $\{\frac{1}{4}(\sqrt{2}+\sqrt{3}-1)\sqrt{2+\sqrt{2}}\}^2$

$= \frac{1}{16}(\sqrt{2}+\sqrt{3}-1)^2(2+\sqrt{2})$

$= \frac{1}{16}(2+3+1+2\sqrt{6}-2\sqrt{2}-2\sqrt{3})(2+\sqrt{2})$

$= \frac{1}{8}(3+\sqrt{6}-\sqrt{2}-\sqrt{3})(2+\sqrt{2})$

$= \frac{1}{8}(6+2\sqrt{6}-2\sqrt{2}-2\sqrt{3}+3\sqrt{2}+2\sqrt{3}-2-\sqrt{}$

$= \frac{(4+\sqrt{6}+\sqrt{2})}{8}$

$\therefore\quad \cos^2 7\frac{1}{2}^\circ = \{\frac{1}{4}(\sqrt{2}+\sqrt{3}-1)\sqrt{2+\sqrt{2}}\}^2$

$\therefore\quad \cos 7\frac{1}{2}^\circ = \frac{1}{4}(\sqrt{2}+\sqrt{3}-1)\sqrt{2+\sqrt{2}}.$

4. 18° কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত।

মনে কর $A = 18^\circ$. $\therefore\ 5A = 90^\circ$, $2A = 36^\circ$. এবং $3A = 54^\circ$.

অতএব $2A = 90^\circ - 3A$.

$\therefore\quad \sin 2A = \sin(90^\circ - 3A) = \cos 3A$

বা $\quad 2\sin A\cos A = 4\cos^3 A - 3\cos A.$

বা $\quad 2\sin A = 4\cos^2 A - 3.\quad$ [যেহেতু $\cos A$ অর্থাৎ $\cos 18^\circ = 0$ নহে]

বা $\quad 2\sin A = 4(1-\sin^2 A) - 3$

বা $\quad 4\sin^2 A + 2\sin A - 1 = 0.$

$\therefore\quad \sin A = \frac{-2\pm\sqrt{4+16}}{8} = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$

18° প্রথম পাদের কোণ বলিয়া $\sin 18^\circ$ ধনাত্মক ;

$\therefore\quad \sin 18^\circ = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}.$

$$\cos 18^\circ = \sqrt{1 - \frac{(\sqrt{5}-1)^2}{16}} = \frac{\sqrt{16-(5+1-2\sqrt{5})}}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$$

$$\tan 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4} \times \frac{4}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} = \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$$

ইহার সাহায্যে 72° কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত নির্ণয় করা যায়

$\sin 72^\circ = \sin(90^\circ - 18^\circ) = \cos 18^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$.

তদ্রূপ $\cos 72^\circ = \sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

5. 36° ও 54° কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত।

$$\cos 36^\circ = \cos(2 \times 18)^\circ = 1 - 2\sin^2 18^\circ$$

$$= 1 - 2\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2 = 1 - 2\left(\frac{6-2\sqrt{5}}{16}\right)$$

$$= 1 - \frac{3-\sqrt{5}}{4} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$$

$$\sin 36^\circ = \sqrt{1-\cos^2 36^\circ} = \sqrt{1 - \frac{(\sqrt{5}+1)^2}{16}}$$

$$= \sqrt{\frac{16-5-1-2\sqrt{5}}{16}} = \sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{16}} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$$

$$\cos 54^\circ = \cos(90^\circ - 36^\circ) = \sin 36^\circ = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$$

$$\sin 54^\circ = \sin(90^\circ - 36^\circ) = \cos 36^\circ = \frac{1+\sqrt{5}}{4}.$$

6. 3° কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত নির্ণয়।

$$\sin 3^\circ = \sin(18^\circ - 15^\circ) = \sin 18^\circ \cos 15^\circ - \cos 18^\circ \sin 15^\circ.$$

$$= \tfrac{1}{4}(\sqrt{5}-1)\cdot\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} - \tfrac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

$$= \tfrac{1}{4}(\sqrt{5}-1)\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4} - \tfrac{1}{4}\sqrt{2}\sqrt{5+\sqrt{5}}.\ \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

$$= \tfrac{1}{16}(\sqrt{5}-1)(\sqrt{6}+\sqrt{2}) - \tfrac{1}{8}(\sqrt{3}-1)(\sqrt{5+\sqrt{5}})$$

$\cos 3° = \cos(18° - 15°) = \cos 18° \cos 15° + \sin 18° \sin 15°$

$$= \tfrac{1}{4}(\sqrt{10+2\sqrt{5}})\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}\right) + \tfrac{1}{4}(\sqrt{5}-1)\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\right)$$

$$= \tfrac{1}{4}(\sqrt{2}\sqrt{5+\sqrt{5}})\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}\right) + \tfrac{1}{4}(\sqrt{5}-1)\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)$$

$$= \tfrac{1}{8}(\sqrt{3}+1)(\sqrt{5+\sqrt{5}}) + \tfrac{1}{16}(\sqrt{5}-1)(\sqrt{6}-\sqrt{2})$$

উল্লিখিত কোণ সমূহের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের সাহায্যে $3°$-র যে কোন গুণিতকের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত নির্ণয় করা যায়। যথা—

$6° = 36° - 30°$; $9° = 45° - 36°$; $12° = 30° - 18°$; ইত্যাদি।

উদা. 1. Find the value of sin 6° and cos 6°.

$\sin 6° = \sin(36° - 30°) = \sin 36° \cos 30° - \cos 36° \sin 30°$.

$$= (\tfrac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}).\frac{\sqrt{3}}{2} - \tfrac{1}{4}(\sqrt{5}+1).\tfrac{1}{2}$$

$$= \tfrac{1}{8}(\sqrt{3}\sqrt{10-2\sqrt{5}} - \sqrt{5} - 1)$$

$\cos 6° = \cos(36° - 30°) = \cos 36° \cos 30° + \sin 36° \sin 30°$.

$$= \tfrac{1}{4}(\sqrt{5}+1).\frac{\sqrt{3}}{2} + \tfrac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}.\tfrac{1}{2}$$

$$= \tfrac{1}{8}\{\sqrt{3}(\sqrt{5}+1) + \sqrt{10-2\sqrt{5}}\}.$$

উদা. 2. If $\tan A = \dfrac{2mn}{m^2 - n^2}$, find $\tan \dfrac{A}{2}$.

$$\frac{2mn}{m^2 - n^2} = \tan A = \frac{2\tan\frac{A}{2}}{1 - \tan^2\frac{A}{2}}$$

এখন ধর $\tan \dfrac{A}{2} = x$

তাহা হইলে, $\dfrac{2mn}{m^2 - n^2} = \dfrac{2x}{1 - x^2}$ বা $\dfrac{mn}{m^2 - n^2} = \dfrac{x}{1 - x^2}$

বা $(m^2 - n^2)x = mn - mnx^2$

বা $mnx^2 + m^2x - n^2x - mn = 0$

বা $mx(nx+m)-n(nx+m)=0$

বা $(nx+m)(mx-n)=0$

$\therefore$ $nx+m=0$ বা $mx-n=0$

$\therefore$ $x=-\frac{m}{n}$ বা $\frac{n}{m}$

অর্থাৎ $\tan\frac{A}{2}=-\frac{m}{n}$ বা $\frac{n}{m}$

উদা. 3. Prove that $\sin^2 72^\circ-\sin^2 60^\circ=\frac{\sqrt{5}-1}{8}$.

$\sin^2 72^\circ=\sin^2(90^\circ-18^\circ)=\cos^2 18^\circ=(\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}})^2$

$=\frac{1}{16}(10+2\sqrt{5})$

$\sin^2 60^\circ=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$.

$\therefore$ $\sin^2 72^\circ-\sin^2 60^\circ$

$$=\frac{10+2\sqrt{5}}{16}-\frac{3}{4}=\frac{10+2\sqrt{5}-12}{16}=\frac{2\sqrt{5}-2}{16}=\frac{\sqrt{5}-1}{8}.$$

উদা 4. Prove that $\sec\theta+\tan\theta=\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)$.

(C. U. Int., 1939)

$\sec\theta+\tan\theta$

$$=\frac{1}{\cos\theta}+\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$=\frac{\sin^2\frac{\theta}{2}+\cos^2\frac{\theta}{2}+2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}}=\frac{\left(\cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2}\right)^2}{\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}}$$

$$\frac{\cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2}}=\frac{\dfrac{\cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}}{\dfrac{\cos\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}}=\frac{1+\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan\frac{\theta}{2}}$$

$$=\frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan\frac{\pi}{4}\cdot\tan\frac{\theta}{2}}=\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right).$$

উদা. 5. Given $\sin 210^\circ=-\frac{1}{2}$, find $\sin 105^\circ$ and $\cos 105^\circ$.

ধর $A=210^\circ$

যেহেতু $\sin\frac{A}{2}=\frac{1}{2}\{\pm\sqrt{1+\sin A}\pm\sqrt{1-\sin A}\}$

$$\therefore\quad \sin 105^\circ=\tfrac{1}{2}\{\pm\sqrt{1-\tfrac{1}{2}}\pm\sqrt{1-(-\tfrac{1}{2})}\}\qquad(\because\ \sin 210^\circ=-\tfrac{1}{2})$$

$$=\tfrac{1}{2}\{\pm\sqrt{\tfrac{1}{2}}\pm\sqrt{\tfrac{3}{2}}\}$$

$$=\tfrac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\{\pm(\sqrt{3}+1)\}$$

এখন $\sin 105^\circ$ দ্বিতীয় পাদে অবস্থিত বলিয়া ধনাত্মক

সুতরাং $\sin 105^\circ=\frac{1}{2\sqrt{2}}(\sqrt{3}+1)$

$$=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

$$\cos 105^\circ=\pm\sqrt{1-\sin^2 105^\circ}=\pm\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}\right)^2}$$

$$=\pm\sqrt{\frac{8-3-1-2\sqrt{3}}{8}}$$

$$=\pm\sqrt{\frac{4-2\sqrt{3}}{8}}=\pm\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

কিন্তু $\cos 105^\circ$ দ্বিতীয় পাদে অবস্থিত বলিয়া ঋণাত্মক।

$$\therefore\quad \cos 105^\circ=-\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}.$$

উদা. 6. Prove that

$$\sin 9^\circ = \tfrac{1}{4}\left(\sqrt{3+\sqrt5} - \sqrt{5-\sqrt5}\right)$$

and $\cos 9^\circ = \tfrac{1}{4}\left(\sqrt{3+\sqrt5} + \sqrt{5-\sqrt5}\right)$

আমরা জানি $\sin\frac{A}{2} + \cos\frac{A}{2} = \pm\sqrt{1+\sin A}$

এবং $\sin\frac{A}{2} - \cos\frac{A}{2} = \pm\sqrt{1-\sin A}$

9° প্রথম পাদের কোণ, সুতরাং sin 9° এবং cos 9° উভয়ই ধনাত্মক।

$\therefore\ \sin 9^\circ + \cos 9^\circ = \sqrt{1+\sin 18^\circ}$ ... ... (i)

আবার যেহেতু sin 9° অপেক্ষা cos 9° বৃহত্তর, সুতরাং

$\sin 9^\circ - \cos 9^\circ = -\sqrt{1-\sin 18^\circ}$ ... ... (ii)

(i) হইতে, $\sin 9^\circ + \cos 9^\circ = \sqrt{1 + \frac{\sqrt5 - 1}{4}} = \frac{\sqrt{3+\sqrt5}}{2}$ ... (iii)

(ii) হইতে $\sin 9^\circ - \cos 9^\circ = -\sqrt{1 - \frac{\sqrt5 - 1}{4}} = \frac{-\sqrt{5-\sqrt5}}{2}$ (iv)

(iii) ও (iv) যোগ করিয়া, $2\sin 9^\circ = \frac{\sqrt{3+\sqrt5} - \sqrt{5-\sqrt5}}{2}$

$\therefore\ \sin 9^\circ = \frac{\sqrt{3+\sqrt5} - \sqrt{5-\sqrt5}}{4}$

(iii) হইতে (iv) বিয়োগ করিয়া, $2\cos 9^\circ = \frac{\sqrt{3+\sqrt5} + \sqrt{5-\sqrt5}}{2}$

$\therefore\ \cos 9^\circ = \frac{\sqrt{3+\sqrt5} + \sqrt{5-\sqrt5}}{4}$

প্রশ্নমালা 6

1. Find the value of sin 12° and cos 12°.

2. Given $\tan 15^\circ = 2 - \sqrt3$,
prove that $\tan 7\tfrac{1}{2}^\circ = (\sqrt3 - \sqrt2)(\sqrt2 - 1)$

3. Prove that $\cos 15^\circ - \sin 15^\circ = \frac{1}{\sqrt2}$.

4. Evaluate $\tan \frac{1}{8}\pi$ and $\cot \frac{1}{8}\pi$.

5. Given $\cos 330^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, find the values of $\sin 165^\circ$ and $\cos 165^\circ$.

6. Given $\sin A = \frac{24}{25}$, and that A lies between 90° and 180°, find $\sin \frac{1}{2} A$ and $\cos \frac{1}{2} A$.

7. Prove that $\sin A = 16. \cos \frac{A}{2} \cos \frac{A}{4} \cos \frac{A}{8} \cos \frac{A}{16}$.

8. Prove that $\sec \theta + \tan \theta = \tan (\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\theta)$ (C. U. 1939)

9. Given $\cos \theta = \frac{4}{5}$, find $\tan \frac{\theta}{2}$.

10. If $\cos A = \frac{3}{5}$ and $\cos B = \frac{4}{5}$, find the value of $\cos \frac{1}{2}(A - B)$, when A and B are both positive angles.

11. Given $\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$, prove that

(i) $\sin 7\frac{1}{2}^\circ = \frac{\sqrt{4 - \sqrt{6} - \sqrt{2}}}{2\sqrt{2}}$

(ii) $\cos 7\frac{1}{2}^\circ = \frac{\sqrt{4 + \sqrt{6} + \sqrt{2}}}{2\sqrt{2}}$

12. Given $\tan 22\frac{1}{2}^\circ = \sqrt{2} - 1$, prove that

$\tan 11\frac{1}{4}^\circ = \sqrt{4 + 2\sqrt{2}} - (\sqrt{2} + 1)$

উদা. 6. Prove that

$$\sin 9° = \tfrac{1}{4}(\sqrt{3+\sqrt{5}} - \sqrt{5-\sqrt{5}})$$

and $\cos 9° = \tfrac{1}{4}(\sqrt{3+\sqrt{5}} + \sqrt{5-\sqrt{5}})$

আমরা জানি $\sin\frac{A}{2} + \cos\frac{A}{2} = \pm\sqrt{1+\sin A}$

এবং $\sin\frac{A}{2} - \cos\frac{A}{2} = \pm\sqrt{1-\sin A}$

9° প্রথম পাদের কোণ, সুতরাং sin 9° এবং cos 9° উভয়ই ধনাত্মক।

$\therefore \quad \sin 9° + \cos 9° = \sqrt{1+\sin 18°} \quad \cdots \quad \cdots \quad$ (i)

আবার যেহেতু sin 9° অপেক্ষা cos 9° বৃহত্তর, সুতরাং

$\sin 9° - \cos 9° = -\sqrt{1-\sin 18°} \quad \cdots \quad \cdots \quad$ (ii)

(i) হইতে, $\sin 9° + \cos 9° = \sqrt{1 + \frac{\sqrt{5}-1}{4}} = \frac{\sqrt{3+\sqrt{5}}}{2} \quad \cdots$ (iii)

(ii) হইতে $\sin 9° - \cos 9° = -\sqrt{1 - \frac{\sqrt{5}-1}{4}} = -\frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2}$ (iv)

(iii) ও (iv) যোগ করিয়া, $2\sin 9° = \frac{\sqrt{3+\sqrt{5}} - \sqrt{5-\sqrt{5}}}{2}$

$\therefore \quad \sin 9° = \frac{\sqrt{3+\sqrt{5}} - \sqrt{5-\sqrt{5}}}{4}$

(iii) হইতে (iv) বিয়োগ করিয়া, $2\cos 9° = \frac{\sqrt{3+\sqrt{5}} + \sqrt{5-\sqrt{5}}}{2}$

$\therefore \quad \cos 9° = \frac{\sqrt{3+\sqrt{5}} + \sqrt{5-\sqrt{5}}}{4}$

প্রশ্নমালা 6

1. Find the value of sin 12° and cos 12°.

2. Given $\tan 15° = 2 - \sqrt{3}$,
prove that $\tan 7\tfrac{1}{2}° = (\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{2} - 1)$

3. Prove that $\cos 15° - \sin 15° = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

4. Evaluate $\tan \frac{1}{8}\pi$ and $\cot \frac{1}{8}\pi$.

5. Given $\cos 330^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, find the values of $\sin 165^\circ$ and $\cos 165^\circ$.

6. Given $\sin A = \frac{24}{25}$, and that A lies between 90° and 180°, find $\sin \frac{1}{2} A$ and $\cos \frac{1}{2} A$.

7. Prove that $\sin A = 16 . \cos \frac{A}{2} \cos \frac{A}{4} \cos \frac{A}{8} \cos \frac{A}{16}$.

8. Prove that $\sec \theta + \tan \theta = \tan (\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\theta)$ (C. U. 1939)

9. Given $\cos \theta = \frac{4}{5}$, find $\tan \frac{\theta}{2}$.

10. If $\cos A = \frac{3}{5}$ and $\cos B = \frac{4}{5}$, find the value of $\cos \frac{1}{2}(A - B)$, when A and B are both positive angles.

11. Given $\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$, prove that

(i) $\sin 7\frac{1}{2}^\circ = \frac{\sqrt{4-\sqrt{6}-\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}}$

(ii) $\cos 7\frac{1}{2}^\circ = \frac{\sqrt{4+\sqrt{6}+\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}}$

12. Given $\tan 22\frac{1}{2}^\circ = \sqrt{2} - 1$, prove that

$\tan 11\frac{1}{4}^\circ = \sqrt{4 + 2\sqrt{2}} - (\sqrt{2} + 1)$

সপ্তম অধ্যায়

ত্রিকোণমিতিক অভেদ

(Trigonometrical Identities)

1. If A, B, C be the angles of a triangle, prove that

$$\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$$

(C. U. Int. 1951)

$\because\ A+B+C=180^\circ \quad \therefore\ A+B=(180^\circ-C)$

$\therefore\ \tan(A+B)=\tan(180^\circ-C)=-\tan C$

বা $\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}=-\tan C$

বা $\tan A+\tan B=-\tan C(1-\tan A\tan B)$

$\therefore\ \tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C.$

2. If $A+B+C=180^\circ$, prove that

$$\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\sin A\sin B\sin C$$

(C. U. 1953)

$A+B+C=180^\circ,\quad \therefore\ A+B=180^\circ-C$

$\therefore\ \sin(A+B)=\sin(180^\circ-C)=\sin C$

এবং $\cos(A+B)=\cos(180^\circ-C)=-\cos C$

$\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C$

$=2\sin(A+B)\cos(A-B)+2\sin C\cos C$

$=2\sin C\cos(A-B)+2\sin C\cos C$

$=2\sin C\{\cos(A-B)+\cos C\}$

$=2\sin C\{\cos(A-B)-\cos(A+B)\}$

$=2\sin C\cdot 2\sin A\sin B=4\sin A\sin B\sin C.$

3. If $A+B+C=\pi$, prove that

$$\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C+2\cos A\cos B\cos C=1.$$

(C. U. Int. 1947, 1959)

$A+B+C=\pi,$

$\therefore\ A=\pi-(B+C)\quad \therefore\ \cos A=-\cos(B+C)$

$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2\cos A \cos B \cos C - 1$

$= (\cos A + \cos B \cos C)^2 - \cos^2 B \cos^2 C + \cos^2 B + \cos^2 C - 1$

$= \{-\cos(B + C) + \cos B \cos C\}^2 - (1 - \cos^2 B)(1 - \cos^2 C)$

$= \{-\cos B \cos C + \sin B \sin C + \cos B \cos C\}^2 - \sin^2 B \sin^2 C$

$= \sin^2 B \sin^2 C - \sin^2 B \sin^2 C$

$= 0$

$\therefore \quad \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2\cos A \cos B \cos C = 1.$

4. If $A + B + C = \pi$, prove that

$\cot B \cot C + \cot C \cot A + \cot A \cot B = 1.$

$A + B + C = \pi, \quad \therefore \quad A + B = \pi - C$

$\therefore \quad \cot(A + B) = \cot(\pi - C) = -\cot C$

বা, $\dfrac{\cot A \cot B - 1}{\cot A + \cot B} = -\cot C$

বা, $\cot A \cot B - 1 = -\cot C \cot A - \cot B \cot C$

বা, $\cot A \cot B + \cot B \cot C + \cot C \cot A = 1.$

5. If $\alpha + \beta + \gamma = \dfrac{\pi}{2}$, prove that

$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma + 2\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma =$

$\alpha + \beta + \gamma = \dfrac{\pi}{2}, \quad \therefore \quad \alpha + \beta = \left(\dfrac{\pi}{2} - \gamma\right)$

$\therefore \quad \cos(\alpha + \beta) = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \gamma\right) = \sin \gamma$

$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma + 2\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$

$= \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta - \sin^2 \alpha \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma$

$\qquad + 2\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma + \sin^2 \alpha \sin^2 \beta$

$= 1 - (1 - \sin^2 \alpha)(1 - \sin^2 \beta) + (\sin \gamma + \sin \alpha \sin \beta)^2$

$= 1 - \cos^2 \alpha \cos^2 \beta + \{\cos(\alpha + \beta) + \sin \alpha \sin \beta\}^2$

$= 1 - \cos^2 \alpha \cos^2 \beta + \{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta + \sin \alpha \sin \beta\}^2$

$= 1 - \cos^2 \alpha \cos^2 \beta + \cos^2 \alpha \cos^2 \beta = 1.$

6. If $A + C + C = \pi$, prove that

$$\frac{\cos A}{\sin B \sin C} + \frac{\cos B}{\sin C \sin A} + \frac{\cos C}{\sin A \sin B} = 2$$

পূর্বে (উদা. 2) প্রমাণ হইয়াছে যে, $A+B+C=\pi$ হইলে,

$$\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\sin A\sin B\sin C$$

বা, $2\sin A\cos A+2\sin B\cos B+2\sin C\cos C$
$$=4\sin A\sin B\sin C$$

বা, $\sin A\cos A+\sin B\cos B+\sin C\cos C$
$$=2\sin A\sin B\sin C$$

উভয় পক্ষকে $\sin A\sin B\sin C$ দ্বারা ভাগ করিয়া

$$\frac{\cos A}{\sin B\sin C}+\frac{\cos B}{\sin C\sin A}+\frac{\cos C}{\sin A\sin B}=2.$$

উদা. 7. If $A+B+C=180°$, show that

$1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\cos A+\cos B+\cos C.$ (C. U. Int. 1952)

$\cos A+\cos B+\cos C$

$=1-2\sin^2\frac{A}{2}+2\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}$

$=1-2\sin^2\frac{A}{2}+2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}$

$$\left[\because \cos\frac{B+C}{2}=\cos\left(90°-\frac{A}{2}\right)=\sin\frac{A}{2}\right]$$

$=1+2\sin\frac{A}{2}\left(\cos\frac{B-C}{2}-\sin\frac{A}{2}\right)$

$=1+2\sin\frac{A}{2}\left\{\cos\frac{B-C}{2}-\cos\frac{B+C}{2}\right\}$

$=1+2\sin\frac{A}{2}\left\{2\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right\}$

$=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$

উদা. 8. If $A+B+C=180°$, prove that

$\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

$\sin A+\sin B+\sin C$

$=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$

$= 2\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2} + 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$

$$\left[\because \quad \sin\frac{A+B}{2} = \sin\left(90^\circ - \frac{C}{2}\right) = \cos\frac{C}{2}\right]$$

$= 2\cos\frac{C}{2}\left\{\cos\frac{A-B}{2} + \sin\frac{C}{2}\right\}$

$= 2\cos\frac{C}{2}\left\{\cos\frac{A-B}{2} + \cos\frac{A+B}{2}\right\}$

$$\left[\because \quad \sin\frac{C}{2} = \sin\left(90^\circ - \frac{A+B}{2}\right) = \cos\frac{A+B}{2}\right]$$

$= 2\cos\frac{C}{2}\left\{2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\right\}$

$= 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.$

উদা. 9. If $A+B+C=\pi$, prove that

$$\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2} + \tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} + \tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2} = 1$$

$A+B+C=\pi.$

$\frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{C}{2}=\frac{\pi}{2}$ or, $\frac{B}{2}+\frac{C}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}$

$\tan\left(\frac{B}{2}+\frac{C}{2}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}\right) = \cot\frac{A}{2} = \frac{1}{\tan\frac{A}{2}}$

or, $\dfrac{\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}}{1-\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}} = \dfrac{1}{\tan\frac{A}{2}}$

or, $\tan\frac{A}{2}\left(\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\right) = 1-\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}$

or, $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}=1$

10. If $\alpha+\beta=\gamma$, prove that

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma=\sin^2\gamma.$$

$\cos^2\alpha+\cos^2\beta-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$

$=\cos^2\alpha+\cos^2\beta-2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha+\beta)$

$=\cos^2\alpha+\cos^2\beta-2\cos\alpha\cos\beta(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)$

$=\cos^2\alpha+\cos^2\beta-2\cos^2\alpha\cos^2\beta+2\cos\alpha\cos\beta\sin\alpha\sin\beta$

$=\cos^2\alpha-\cos^2\alpha\cos^2\beta+\cos^2\beta-\cos^2\alpha\cos^2\beta+2\cos\alpha\cos\beta\sin\alpha\sin\beta$

$=\cos^2\alpha(1-\cos^2\beta)+\cos^2\beta(1-\cos^2\alpha)+2\cos\alpha\cos\beta\sin\alpha\sin\beta$

$=\cos^2\alpha\sin^2\beta+\cos^2\beta\sin^2\alpha+2\cos\alpha\cos\beta\sin\alpha\sin\beta$

$=(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)^2$

$=\sin^2(\alpha+\beta)=\sin^2\gamma.$

প্রশ্নমালা 7

1. Prove that $\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}=\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}$, when $A+B+C=\pi$. (Delhi University, 1955)

2. If $A+B+C=180^\circ$, prove that $\sin A+\sin B-\sin C$

$$=4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

3. If A, B, C be the angles of a triangle, show that
$\cos^2 A+\cos^2 B+2\cos A\cos B\cos C=\sin^2 C.$

4. If $A+B+C=180^\circ$, prove that $\sin 2A+\sin 2B-\sin 2C$
$=4\cos A\cos B\sin C$

5. If $A+B+C=180^\circ$, prove that $\sin(B+C-A)+\sin(C+A-B)$ $+\sin(A+B-C)=4\sin A\sin B\sin C$

6. If $A+B+C=\pi$, prove that
$\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C-2\cos A\cos B\cos C=2.$

7. If $A+B+C=180^\circ$, prove that $\cos 2A+\cos 2B-\cos 2C$
$=1-4\sin A\sin B\cos C$

8. If $A+B+C=180^\circ$, prove that

$$\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}=1-2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

9. If $A+B+C=\pi$, prove that

$$\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}-\sin^2\frac{C}{2}=1-2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

10. If $A+B+C=\pi$, prove that

$$\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C=-4\cos A\cos B\cos C-1.$$

11. Prove that $\tan(A-B)+\tan(B-C)+\tan(C-A)$

$$=\tan(A-B)\tan(B-C)\tan(C-A)$$

12. If $A+B+C=180$, show that

$$\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}+\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C-A}{2}+\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

$$=\sin A+\sin B+\sin C$$

13. If $A+B+C=\pi$, show that

$$\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}=4\cos\frac{\pi-A}{4}\cos\frac{\pi-B}{4}\cos\frac{\pi-C}{4}.$$

14. If $A+B+C=\pi$, prove that

$$\sin(A+2B)+\sin(B+2C)+\sin(C+2A)$$

$$=4\sin\frac{B-C}{2}\sin\frac{C-A}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$

15. If $A+B+C=\pi$, prove that

$$\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}=1+4\sin\frac{B+C}{4}\sin\frac{C+A}{4}\sin\frac{A+B}{4}$$

16. If $A+B+C=\pi$, prove that

$$\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}=4\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{C+A}{2}\cos\frac{A+B}{2}$$

17. If $A+B+C=\pi$, prove that $\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}+\cos^2\frac{C}{2}$

$$=2\left(1+\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right)$$

(Delhi U. 1956)
(C. U. Int. 1948)

IMPORTANT TRIGONOMETRICAL FORMULAE AND RESULTS

1. π = Ratio of the circumference of a circle to its diameter $= 3 \cdot 1416 \cdots\cdots = \frac{22}{7}$ approximately

Circumference of a circle $= 2\pi r$.

A Radian $= 57^\circ 17' 44 \cdot 8''$ (approx.) ;

π radians $= 2$ right angles $= 180^\circ$.

Measure of an angle at the centre of a circle subtended by an

$$\text{arc} = \frac{\text{arc}}{\text{radius}} \text{ radian.}$$

2. $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$; $\cot\theta = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$.

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$; $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$;

$\operatorname{cosec}^2\theta = 1 + \cot^2$.

3. $\sin 0^\circ = 0$, $\cos 0^\circ = 1$, $\tan 0^\circ = 0$;

$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$, $\cos 30^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\tan 30^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\tan 45^\circ = 1$.

$\sin 60^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$, $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$.

$\sin 90^\circ = 1$. $\cos 90^\circ = 0$,

$\sin 180^\circ = 0$, $\cos 180^\circ = -1$, $\tan 180^\circ = 0$.

$\sin 270^\circ = -1$, $\cos 270^\circ = 0$.

$\sin 360^\circ = 0$, $\cos 360^\circ = 1$, $\tan 360^\circ = 0$.

$\sin 120^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$, $\tan 120^\circ = -\sqrt{3}$.

$\sin 135^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos 135^\circ = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\tan 135^\circ = -1$.

$\sin 150^\circ = \frac{1}{2}$, $\cos 150^\circ = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\tan 150^\circ = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

$\sin 15^\circ = \cos 75^\circ = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$, $\cos 15^\circ = \sin 75^\circ = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$,

$\tan 15^\circ = \cot 75^\circ = 2 - \sqrt{3}$.

$\sin 18^\circ = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$, $\cos 18^\circ = \dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$

$\sin 36^\circ = \dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$, $\cos 36^\circ = \dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$.

4. $\sin(-\theta) = \sin(360° - \theta) = -\sin\theta,$
$\cos(-\theta) = \cos(360° - \theta) = \cos\theta.$
$\tan(-\theta) = \tan(360° - \theta) = -\tan\theta.$
$\sin(90° - \theta) = \cos\theta, \cos(90° - \theta) = \sin\theta,$
$\tan(90° - \theta) = \cot\theta.$
$\sin(90° + \theta) = \cos\theta, \cos(90° + \theta) = -\sin\theta,$
$\tan(90° + \theta) = -\cot\theta.$
$\sin(180° - \theta) = \sin\theta, \cos(180° - \theta) = -\cos\theta,$
$\tan(180° - \theta) = -\tan\theta.$
$\sin(180° + \theta) = -\sin\theta, \cos(180° + \theta) = -\cos\theta,$
$\tan(180° + \theta) = \tan\theta.$
$\sin(270° - \theta) = -\cos\theta, \cos(270° - \theta) = -\sin\theta,$
$\tan(270° - \theta) = \cot\theta.$
$\sin(270° + \theta) = -\cos\theta, \cos(270° + \theta) = \sin\theta,$
$\tan(270° + \theta) = -\cot\theta.$

5. $\sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B.$
$\sin(A-B) = \sin A\cos B - \cos A\sin B.$
$\cos(A+B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B.$
$\cos(A-B) = \cos A\cos B + \sin A\sin B.$

$$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A\tan B};$$

$$\tan(A-B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A\tan B}.$$

$$\cot(A+B) = \frac{\cot A\cot B - 1}{\cot B + \cot A}; \quad \cot(A-B) = \frac{\cot A\cot B + 1}{\cot B - \cot A}$$

$$\tan(A+B+C) = \frac{\tan A + \tan B + \tan C - \tan A\tan B\tan C}{1 - \tan A\tan B - \tan B\tan C - \tan C\tan A}.$$

6. $2\sin A\cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B)$
$2\cos A\sin B = \sin(A+B) - \sin(A-B)$
$2\cos A\cos B = \cos(A+B) + \cos(A-B)$
$2\sin A\sin B = \cos(A-B) - \cos(A+B)$

7. $\sin C + \sin D = 2\sin\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}$

$\sin C - \sin D = 2\cos\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2}$

$\cos C + \cos D = 2\cos\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}$

$\cos C - \cos D = 2\sin\frac{C+D}{2}\sin\frac{D-C}{2}$

8. $\sin 2A = 2\sin A\cos A = \dfrac{2\tan A}{1+\tan^2 A}$

$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = 1 - 2\sin^2 A$

$= 2\cos^2 A - 1 = \dfrac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}.$

$\tan 2A = \dfrac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$;

$1-\cos 2A = 2\sin^2 A,\ 1+\cos 2A = 2\cos^2 A$;

$\dfrac{1-\cos 2A}{1+\cos 2A} = \tan^2 A.$

$\sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A$; $\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A.$

$\tan 3A = \dfrac{3\tan A - \tan^3 A}{1-3\tan^2 A}.$

9. $\sin\theta = 2\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}$;

$\cos\theta = \cos^2\dfrac{\theta}{2} - \sin^2\dfrac{\theta}{2} = 2\cos^2\dfrac{\theta}{2} - 1 = 1 - 2\sin^2\dfrac{\theta}{2}.$

$\tan\theta = \dfrac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}$

$\sin\theta = \dfrac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}$

$\cos\theta = \dfrac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}$

$1+\cos\theta = 2\cos^2\dfrac{\theta}{2}$;

$\cos\dfrac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\theta}{2}}$

$1-\cos\theta = 2\sin^2\dfrac{\theta}{2}$;

$\sin\dfrac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\theta}{2}}$

$\dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta} = \tan^2\dfrac{\theta}{2}$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1 2 3	4 5 6	7 8 9
10	0000	0043	0086	0128	0170						5 9 13	17 21 26	30 34 38
						0212	0253	0294	0334	0374	4 8 12	16 20 24	28 32 36
11	0414	0453	0492	0531	0569						4 8 12	16 20 23	27 31 35
						0607	0645	0682	0719	0755	4 7 11	15 18 22	26 29 33
12	0792	0828	0864	0899	0934						3 7 11	14 18 21	25 28 32
						0969	1004	1038	1072	1106	3 7 10	14 17 20	24 27 31
13	1139	1173	1206	1239	1271						3 6 10	13 16 19	23 26 29
						1303	1335	1367	1399	1430	3 7 10	13 16 19	22 25 29
14	1461	1492	1523	1553	1584						3 6 9	12 15 19	22 25 28
						1614	1644	1673	1703	1732	3 6 9	12 14 17	20 23 26
15	1761	1790	1818	1847	1875						3 6 9	11 14 17	20 23 26
						1903	1931	1959	1987	2014	3 6 8	11 14 17	19 22 25
16	2041	2068	2095	2122	2148						3 6 8	11 14 16	19 22 24
						2175	2201	2227	2253	2279	3 5 8	10 13 16	18 21 23
17	2304	2330	2355	2380	2405						3 5 8	10 13 15	18 20 23
						2430	2455	2480	2504	2529	3 5 8	10 12 15	17 20 22
18	2553	2577	2601	2625	2648						2 5 7	9 12 14	17 19 21
						2672	2695	2718	2742	2765	2 4 7	9 11 14	16 18 21
19	2788	2810	2833	2856	2878						2 4 7	9 11 13	16 18 20
						2900	2923	2945	2967	2989	2 4 6	8 11 13	15 17 19
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201	2 4 6	8 11 13	15 17 19
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404	2 4 6	8 10 12	14 16 18
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598	2 4 6	8 10 12	14 15 17
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784	2 4 6	7 9 11	13 15 17
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962	2 4 5	7 9 11	12 14 16
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133	2 3 5	7 9 10	12 14 15
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298	2 3 5	7 8 10	11 13 15
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456	2 3 5	6 8 9	11 13 14
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609	2 3 5	6 8 9	11 12 14
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757	1 3 4	6 7 9	10 12 13
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900	1 3 4	6 7 9	10 11 13
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038	1 3 4	6 7 8	10 11 12
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172	1 3 4	5 7 8	9 11 12
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302	1 3 4	5 6 8	9 10 12
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428	1 3 4	5 6 8	9 10 11
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551	1 2 4	5 6 7	9 10 11
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670	1 2 4	5 6 7	8 10 11
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786	1 2 3	5 6 7	8 9 10
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899	1 2 3	5 6 7	8 9 10
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010	1 2 3	4 5 7	8 9 10
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117	1 2 3	4 5 6	8 9 10
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222	1 2 3	4 5 6	7 8 9
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325	1 2 3	4 5 6	7 8 9
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425	1 2 3	4 5 6	7 8 9
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522	1 2 3	4 5 6	7 8 9
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618	1 2 3	4 5 6	7 8 9
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712	1 2 3	4 5 6	7 7 8
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803	1 2 3	4 5 5	6 7 8
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893	1 2 3	4 4 5	6 7 8
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981	1 2 3	4 4 5	6 7 8

[B] লগারিদম্ (Logarithms)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067	1	2	3	3	4	5	6	7	8
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152	1	2	3	3	4	5	6	7	8
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235	1	2	2	3	4	5	6	7	7
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316	1	2	2	3	4	5	6	6	7
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396	1	2	2	3	4	5	6	6	7
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474	1	2	2	3	4	5	5	6	7
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551	1	2	2	3	4	5	5	6	7
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627	1	2	2	3	4	5	5	6	7
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701	1	1	2	3	4	4	5	6	7
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774	1	1	2	3	4	4	5	6	7
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846	1	1	2	3	4	4	5	6	6
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917	1	1	2	3	4	4	5	6	6
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987	1	1	2	3	3	4	5	6	6
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055	1	1	2	3	3	4	5	5	6
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122	1	1	2	3	3	4	5	5	6
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189	1	1	2	3	3	4	5	5	6
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254	1	1	2	3	3	4	5	5	6
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319	1	1	2	3	3	4	5	5	6
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382	1	1	2	3	3	4	4	5	6
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445	1	1	2	2	3	4	4	5	6
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506	1	1	2	2	3	4	4	5	6
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567	1	1	2	2	3	4	4	5	5
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627	1	1	2	2	3	4	4	5	5
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686	1	1	2	2	3	4	4	5	5
74	8092	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745	1	1	2	2	3	4	4	5	5
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802	1	1	2	2	3	3	4	5	5
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859	1	1	2	2	3	3	4	5	5
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915	1	1	2	2	3	3	4	4	5
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971	1	1	2	2	3	3	4	4	5
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025	1	1	2	2	3	3	4	4	5
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079	1	1	2	2	3	3	4	4	5
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133	1	1	2	2	3	3	4	4	5
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186	1	1	2	2	3	3	4	4	5
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238	1	1	2	2	3	3	4	4	5
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289	1	1	2	2	3	3	4	4	5
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340	1	1	2	2	3	3	4	4	5
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390	1	1	2	2	3	3	4	4	5
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440	0	1	1	2	2	3	3	4	4
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489	0	1	1	2	2	3	3	4	4
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538	0	1	1	2	2	3	3	4	4
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586	0	1	1	2	2	3	3	4	4
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633	0	1	1	2	2	3	3	4	4
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680	0	1	1	2	2	3	3	4	4
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727	0	1	1	2	2	3	3	4	4
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773	0	1	1	2	2	3	3	4	4
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818	0	1	1	2	2	3	3	4	4
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863	0	1	1	2	2	3	3	4	4
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908	0	1	1	2	2	3	3	4	4
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952	0	1	1	2	2	3	3	4	4
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996	0	1	1	2	2	3	3	3	4

এণ্টি লগারিদম্ (Antilogarithms)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
·00	1000	1002	1005	1007	1009	1012	1014	1016	1019	1021	0	0	1	1	1	1	2	2	2
·01	1023	1026	1028	1030	1033	1035	1038	1040	1042	1045	0	0	1	1	1	1	2	2	2
·02	1047	1050	1052	1054	1057	1059	1062	1064	1067	1069	0	0	1	1	1	1	2	2	2
·03	1072	1074	1076	1079	1081	1084	1086	1089	1091	1094	0	0	1	1	1	1	2	2	2
·04	1096	1099	1102	1104	1107	1109	1112	1114	1117	1119	0	1	1	1	1	2	2	2	2
·05	1122	1125	1127	1130	1132	1135	1138	1140	1143	1146	0	1	1	1	1	2	2	2	2
·06	1148	1151	1153	1156	1159	1161	1164	1167	1169	1172	0	1	1	1	1	2	2	2	2
·07	1175	1178	1180	1183	1186	1189	1191	1194	1197	1199	0	1	1	1	1	2	2	2	2
·08	1202	1205	1208	1211	1213	1216	1219	1222	1225	1227	0	1	1	1	1	2	2	2	3
·09	1230	1233	1236	1239	1242	1245	1247	1250	1253	1256	0	1	1	1	1	2	2	2	3
·10	1259	1262	1265	1268	1271	1274	1276	1279	1282	1285	0	1	1	1	1	2	2	2	3
·11	1288	1291	1294	1297	1300	1303	1306	1309	1312	1315	0	1	1	1	2	2	2	2	3
·12	1318	1321	1324	1327	1330	1334	1337	1340	1343	1346	0	1	1	1	2	2	2	2	3
·13	1349	1352	1355	1358	1361	1365	1368	1371	1374	1377	0	1	1	1	2	2	2	3	3
·14	1380	1384	1387	1390	1393	1396	1400	1403	1406	1409	0	1	1	1	2	2	2	3	3
·15	1413	1416	1419	1422	1426	1429	1432	1435	1439	1442	0	1	1	1	2	2	2	3	3
·16	1445	1449	1452	1455	1459	1462	1466	1469	1472	1476	0	1	1	1	2	2	2	3	3
·17	1479	1483	1486	1489	1493	1496	1500	1503	1507	1510	0	1	1	1	2	2	2	3	3
·18	1514	1517	1521	1524	1528	1531	1535	1538	1542	1545	0	1	1	1	2	2	2	3	3
·19	1549	1552	1556	1560	1563	1567	1570	1574	1578	1581	0	1	1	1	2	2	3	3	3
·20	1585	1589	1592	1596	1600	1603	1607	1611	1614	1618	0	1	1	1	2	2	3	3	3
·21	1622	1626	1629	1633	1637	1641	1644	1648	1652	1656	0	1	1	2	2	2	3	3	3
·22	1660	1663	1667	1671	1675	1679	1683	1687	1690	1694	0	1	1	2	2	2	3	3	3
·23	1698	1702	1706	1710	1714	1718	1722	1726	1730	1734	0	1	1	2	2	2	3	3	4
·24	1738	1742	1746	1750	1754	1758	1762	1766	1770	1774	0	1	1	2	2	2	3	3	4
·25	1778	1782	1786	1791	1795	1799	1803	1807	1811	1816	0	1	1	2	2	2	3	3	4
·26	1820	1824	1828	1832	1837	1841	1845	1849	1854	1858	0	1	1	2	2	3	3	3	4
·27	1862	1866	1871	1875	1879	1884	1888	1892	1897	1901	0	1	1	2	2	3	3	3	4
·28	1905	1910	1914	1919	1923	1928	1932	1936	1941	1945	0	1	1	2	2	3	3	4	4
·29	1950	1954	1959	1963	1968	1972	1977	1982	1986	1991	0	1	1	2	2	3	3	4	4
·30	1995	2000	2004	2009	2014	2018	2023	2028	2032	2037	0	1	1	2	2	3	3	4	4
·31	2042	2046	2051	2056	2061	2065	2070	2075	2080	2084	0	1	1	2	2	3	3	4	4
·32	2089	2094	2099	2104	2109	2113	2118	2123	2128	2133	0	1	1	2	2	3	3	4	4
·33	2138	2143	2148	2153	2158	2163	2168	2173	2178	2183	0	1	1	2	2	3	3	4	4
·34	2188	2193	2198	2203	2208	2213	2218	2223	2228	2234	1	1	2	2	3	3	4	4	5
·35	2239	2244	2249	2254	2259	2265	2270	2275	2280	2286	1	1	2	2	3	3	4	4	5
·36	2291	2296	2301	2307	2312	2317	2323	2328	2333	2339	1	1	2	2	3	3	4	4	5
·37	2344	2350	2355	2360	2366	2371	2377	2382	2388	2393	1	1	2	2	3	3	4	4	5
·38	2399	2404	2410	2415	2421	2427	2432	2438	2443	2449	1	1	2	2	3	3	4	4	5
·39	2455	2460	2466	2472	2477	2483	2489	2495	2500	2506	1	1	2	2	3	3	4	5	5
·40	2512	2518	2523	2529	2535	2541	2547	2553	2559	2564	1	1	2	2	3	4	4	5	5
·41	2570	2576	2582	2588	2594	2600	2606	2612	2618	2624	1	1	2	2	3	4	4	5	5
·42	2630	2636	2642	2649	2655	2661	2667	2673	2679	2685	1	1	2	2	3	4	4	5	6
·43	2692	2698	2704	2710	2716	2723	2729	2735	2742	2748	1	1	2	3	3	4	4	5	6
·44	2754	2761	2767	2773	2780	2786	2793	2799	2805	2812	1	1	2	3	3	4	4	5	6
·45	2818	2825	2831	2838	2844	2851	2858	2864	2871	2877	1	1	2	3	3	4	5	5	6
·46	2884	2891	2897	2904	2911	2917	2924	2931	2938	2944	1	1	2	3	3	4	5	5	6
·47	2951	2958	2965	2972	2979	2985	2992	2999	3006	3013	1	1	2	3	3	4	5	5	6
·48	3020	3027	3034	3041	3048	3055	3062	3069	3076	3083	1	1	2	3	4	4	5	6	6
·49	3090	3097	3105	3112	3119	3126	3133	3141	3148	3155	1	1	2	3	4	4	5	6	6

এণ্টি লগারিদম্ (Antilogarithms)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
·50	3162	3170	3177	3184	3192	3199	3206	3214	3221	3228	1	1	2	3	4	4	5	6	7
·51	3236	3243	3251	3258	3266	3273	3281	3289	3296	3304	1	2	2	3	4	5	5	6	7
·52	3311	3319	3327	3334	3342	3350	3357	3365	3373	3381	1	2	2	3	4	5	5	6	7
·53	3388	3396	3404	3412	3420	3428	3436	3443	3451	3459	1	2	2	3	4	5	6	6	7
·54	3467	3475	3483	3491	3499	3508	3516	3524	3532	3540	1	2	2	3	4	5	6	6	7
·55	3548	3556	3565	3573	3581	3589	3597	3606	3614	3622	1	2	2	3	4	5	6	7	7
·56	3631	3639	3648	3656	3664	3673	3681	3690	3698	3707	1	2	3	3	4	5	6	7	8
·57	3715	3724	3733	3741	3750	3758	3767	3776	3784	3793	1	2	3	3	4	5	6	7	8
·58	3802	3811	3819	3828	3837	3846	3855	3864	3873	3882	1	2	3	4	4	5	6	7	8
·59	3890	3899	3908	3917	3926	3936	3945	3954	3963	3972	1	2	3	4	5	5	6	7	8
·60	3981	3990	3999	4009	4018	4027	4036	4046	4055	4064	1	2	3	4	5	6	6	7	8
·61	4074	4083	4093	4102	4111	4121	4130	4140	4150	4159	1	2	3	4	5	6	7	8	9
·62	4169	4178	4188	4198	4207	4217	4227	4236	4246	4256	1	2	3	4	5	6	7	8	9
·63	4266	4276	4285	4295	4305	4315	4325	4335	4345	4355	1	2	3	4	5	6	7	8	9
·64	4365	4375	4385	4395	4406	4416	4426	4436	4446	4457	1	2	3	4	5	6	7	8	9
·65	4467	4477	4487	4498	4508	4519	4529	4539	4550	4560	1	2	3	4	5	6	7	8	9
·66	4571	4581	4592	4603	4613	4624	4634	4645	4656	4667	1	2	3	4	5	6	7	9	10
·67	4677	4688	4699	4710	4721	4732	4742	4753	4764	4775	1	2	3	4	5	7	8	9	10
·68	4786	4797	4808	4819	4831	4842	4853	4864	4875	4887	1	2	3	4	6	7	8	9	10
·69	4898	4909	4920	4932	4943	4955	4966	4977	4989	5000	1	2	3	5	6	7	8	9	10
·70	5012	5023	5035	5047	5058	5070	5082	5093	5105	5117	1	2	4	5	6	7	8	9	11
·71	5129	5140	5152	5164	5176	5188	5200	5212	5224	5236	1	2	4	5	6	7	8	10	11
·72	5248	5260	5272	5284	5297	5309	5321	5333	5346	5358	1	2	4	5	6	7	9	10	11
·73	5370	5383	5395	5408	5420	5433	5445	5458	5470	5483	1	3	4	5	6	8	9	10	11
·74	5495	5508	5521	5534	5546	5559	5572	5585	5598	5610	1	3	4	5	6	8	9	10	12
·75	5623	5636	5649	5662	5675	5689	5702	5715	5728	5741	1	3	4	5	7	8	9	10	12
·76	5754	5768	5781	5794	5808	5821	5834	5848	5861	5875	1	3	4	5	7	8	9	11	12
·77	5888	5902	5916	5929	5943	5957	5970	5984	5998	6012	1	3	4	5	7	8	10	11	12
·78	6026	6039	6053	6067	6081	6095	6109	6124	6138	6152	1	3	4	6	7	8	10	11	13
·79	6166	6180	6194	6209	6223	6237	6252	6266	6281	6295	1	3	4	6	7	9	10	11	13
·80	6310	6324	6339	6353	6368	6383	6397	6412	6427	6442	1	3	4	6	7	9	10	12	13
·81	6457	6471	6486	6501	6516	6531	6546	6561	6577	6592	2	3	5	6	8	9	11	12	14
·82	6607	6622	6637	6653	6668	6683	6699	6714	6730	6745	2	3	5	6	8	9	11	12	14
·83	6761	6776	6792	6808	6823	6839	6855	6871	6887	6902	2	3	5	6	8	9	11	13	14
·84	6918	6934	6950	6966	6982	6998	7015	7031	7047	7063	2	3	5	6	8	10	11	13	15
·85	7079	7096	7112	7129	7145	7161	7178	7194	7211	7228	2	3	5	7	8	10	12	13	15
·86	7244	7261	7278	7295	7311	7328	7345	7362	7379	7396	2	3	5	7	8	10	12	13	15
·87	7413	7430	7447	7464	7482	7499	7516	7534	7551	7568	2	3	5	7	9	10	12	14	16
·88	7586	7603	7621	7638	7656	7674	7691	7709	7727	7745	2	4	5	7	9	11	12	14	16
·89	7762	7780	7798	7816	7834	7852	7870	7889	7907	7925	2	4	5	7	9	11	13	14	16
·90	7943	7962	7980	7998	8017	8035	8054	8072	8091	8110	2	4	6	7	9	11	13	15	17
·91	8128	8147	8166	8185	8204	8222	8241	8260	8279	8299	2	4	6	8	9	11	13	15	17
·92	8318	8337	8356	8375	8395	8414	8433	8453	8472	8492	2	4	6	8	10	12	14	15	17
·93	8511	8531	8551	8570	8590	8610	8630	8650	8670	8690	2	4	6	8	10	12	14	16	18
94	8710	8730	8750	8770	8790	8810	8831	8851	8872	8892	2	4	6	8	10	12	14	16	18
·95	8913	8933	8954	8974	8995	9016	9036	9057	9078	9099	2	4	6	8	10	12	15	17	19
·96	9120	9141	9162	9183	9204	9226	9247	9268	9290	9311	2	4	6	8	11	13	15	17	19
·97	9333	9354	9376	9397	9419	9441	9462	9484	9506	9528	2	4	7	9	11	13	15	17	20
·98	9550	9572	9594	9616	9638	9661	9683	9705	9727	9750	2	4	7	9	11	13	16	18	20
99	9772	9795	9817	9840	9863	9886	9908	9931	9954	9977	2	5	7	9	11	14	16	18	20

উত্তরমালা

পরিমিতি

প্রশ্নমালা 1 (পৃঃ 54—55)

1. 840 ঘ. ফু. **2.** 240 ঘ. ই. **3.** 45 ঘ. ফু. **4.** 16 ঘ. ফু.
5. 12 ঘ. ফু. 1216 ঘ. ই. **6.** 2 ফু. 6 ই. **7.** 3 ফু. 6 ই. **8.** 10 ফু.
9. 4375 **10.** 150 পা. **11.** 400 **12.** 300 ব.ফু.
13. 72 **14.** $1417\frac{31}{32}$ **15.** 4320 **16.** 450 ব.ফু.
17. 2400 টাকা **18.** 1 ঘন্টা **19.** $5\frac{3}{5}$ ফুট **20.** 1105
21. 1 ফু. 2 ই. **22.** $28\frac{3}{4}$ পা.

প্রশ্নমালা 2 (পৃঃ 57—58)

1. 360 ঘ. ফু. ; 408 ব. ফু. **2.** 210 ঘ. ই. ; 252 ব. ই.
3. 3 ব ফু. ; 1296 ঘ. ই. ; 20 ব. ফু. ; 22 ব. ফু., 72 ব. ই.
4. 20 ফুট **5.** 10 ফুট **6.** 1 ফু. 8 ই. **7.** 37 ব. ফু. 72 ব ই.
8. 60 টাকা **9.** 83·1 ঘ. ই. **10.** 66 ঘ. ফু. 1296 ঘ. ই.

প্রশ্নমালা 3 (পৃঃ 60—61)

1. (*i*) 220 ব. ই., $377\frac{1}{7}$ ব. ই, 550 ঘ. ই,
(*ii*) 2 ব. ফু., 64 ব. ই., 3 ব. ফু., $20\frac{4}{7}$ ব. ই., 704 ঘ. ই.
(*iii*) $414\frac{6}{7}$ ব. ফু., $641\frac{1}{7}$ ব. ফু., $1244\frac{4}{7}$ ঘ. ফু. **2.** $\frac{2}{11}$ ই. **3.** 40 টাকা.
4. $127\frac{51}{110}$ ইঞ্চি **5.** $735\frac{3}{7}$ ব. ই. **6.** 1089 ঘ. ফু. **7.** 2·8 ই.
8. $8\frac{3}{4}$ মি. **9.** 4·48 ফুট **10.** $2\frac{3}{4}$ ঘ. ফুট।

প্রশ্নমালা 4 (পৃঃ 62—63)

1. (*i*) 2 ব. ফু. 64 ব. ই., 3 ব. ফু. 74 ব. ই. (*ii*) 3 ব. ফু. 96 ব. ই., $6\frac{17}{21}$ ব.ফু.
(*iii*) 24·01 ব. ফু., 33·63 ব. ফু. (*iv*) 123·2 ঘ. ফু., 221·76 ব. ফু.
2. (*i*) 308 ঘ. ই. (*ii*) 4 ঘ. ফু. 216 ঘ. ই. (*iii*) $301\frac{5}{7}$ ঘ. ই.
(*iv*) 8 ঘ. ফু. 1576 ঘ. ই.
3. 12 ই. **4.** 7·7 ই. **5.** 14 ই. **6.** $169\frac{2}{7}$ ব. ই.
7. 103 টাকা 2 আনা **8.** 12 ফুট।

প্রশ্নমালা 5 (পৃঃ 65)

1. 420 ঘনফুট **2.** 400 ঘনফুট, 260 বর্গফুট। **3.** $333\frac{1}{3}$ ঘনফুট
4. 640 ঘ. ফু. **5.** 30 ফুট **6.** 8 সে. মি., 1152 ঘন সেঃ মি.
7. 1120 ঘন সে. মি. **8.** 4 সে. মি., 144 ঘন সে. মি.

প্রশ্নমালা 6 (পৃঃ 67)

1. (*i*) 616 ব. ই., $1437\frac{1}{3}$ ঘ. ই. (*ii*) 17 ব. ফু. 16 ব. ই., $11498\frac{2}{3}$ ঘ. ই.
(*iii*) 154 ব. ই., $179\frac{2}{3}$ ঘ. ই. (*iv*) $221\frac{19}{25}$ ব. ই., $310\frac{58}{125}$ ঘ. ই.
2. 7 ফুট, 154 ব. ফু. **3.** 6 মণ 24 সের **4.** $253\frac{143}{189}$ পা. **5.** 21952
6. 19404 ঘ.ই. ; 4158 ব.ই. **7.** 1000000 : 19683 **8.** 12 সে. মি.।

প্রশ্নমালা 7 (পৃঃ 67—69)

1. 326·8 গ্যা (প্রায়), 3268 পা. **2.** 46 মি. মি. **3.** 233 টা. 12 আ. 3 পা.
4. $75\frac{3}{7}$ বর্গফুট, $40\frac{1}{3}$ পা. **5.** 240 ঘন সে. মি. **6.** 6 মি. মি.
7. 360 ঘন সে. মি., 432 বর্গ সে. মি. **8.** 12 ফুট
9. 6 **10.** 5 ই., $3\frac{9}{11}$ ই. **11.** 128 বর্গ ই., 96 ঘন ই. **12.** 9 সে. মি.

স্থানাঙ্ক জ্যামিতি

অনুশীলনী 1 (পৃঃ 7৫)

4. (0,0), 0,0. **5.** $(P, -Q)$ **6.** x স্থানাঙ্ক।
7. $(8, 7), (-2, 7), (-2, -1), (8, -1)$

অনুশীলনী 2 (পৃঃ 78—79)

1. (*i*) 13, (*ii*) 5, (*iii*) 5 (*iv*) $\sqrt{2(m^2+n^2)}$ (*v*) c
2. (*i*) 5 (*ii*) 13 (*iii*) 25 (*iv*) $\sqrt{(x^2+y^2)(a^2+b^2)}$
9. 2 বা 10.

অনুশীলনী 3 (পৃঃ 83)

1. (*i*) (3, 1) (*ii*) (1, 1) (*iii*) (5, 2) (*iv*) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$
(*v*) (b, a) **2.** $(5, 1), (-2, 3), (-1, -1)$ **3.** $(\frac{10}{7}, \frac{33}{7})$
4. $(6, -6), (-23, 52)$ **5.** $(\frac{6}{7}, \frac{1}{7})$ **6.** $(-\frac{1}{3}, 0), (-\frac{5}{3}, 2)$
7. 17. **8.** $(-3, 8)$ এবং $(12, -2)$ **9.** 5

অনুশীলনী 4 (পৃঃ 86)

1. 19 2. 1 3. 21 4. 29 5. 2 6. $\frac{1}{2}(a^2+b^2)$
7. 6 8. $2ac$ 9. $2ac$ 10. ab 20. -5

অনুশীলনী 5 (পৃঃ 107—110)

1. $x+y=3.$, $3\sqrt{2}$. 2. $4x+3y=12$ 3. $\frac{x}{\pm(5, 12)}+\frac{y}{\pm(12, 5)}=1$
4. $y=3x-7$, $8\frac{1}{6}$ sq. units 5. $3x+y-5=0$
6. $4x-3y+3=0$, 7. $x+y=-1$
9. $(2, 1)$, $\tan^{-1}\frac{7}{17}$ 10. $43x-29y=71$ 11. $y=3x$
12. $x+y+2=0$ 14. $3x+7y=0$ 15. $a_1a_2+b_1b_2=0$.
16. $2x+11y+25=0$ 18. $7x+6y-85=0$ 20. $3x-4y+7=0$

বীজগণিত

প্রশ্নমালা 1 (পৃঃ 116—117)

1. $\left.\begin{array}{l}x=2, y=3\\ x=3, y=2\end{array}\right\}$ 2. $\left.\begin{array}{l}x=4, y=3\\ x=3, y=4\end{array}\right\}$ 3. 5, 3

4. $\left.\begin{array}{l}x=-2, y=-4\\ x=4, y=2\end{array}\right\}$ 5. $\begin{array}{l}x=7, y=1\\ x=-\frac{103}{5}, y=\frac{97}{5}\end{array}$ 6. $x=\frac{6}{\sqrt{13}}, y=\frac{9}{\sqrt{13}}$; $x=\frac{-6}{\sqrt{13}}, y=\frac{-9}{\sqrt{13}}$.

7. $\left.\begin{array}{l}x=4, y=9\\ x=9, y=4\end{array}\right\}$ 8. $x=2, y=5$ 9. $\left.\begin{array}{l}x=-2, y=-7\\ x=7, y=2\end{array}\right\}$

10. $\left.\begin{array}{l}x=4, y=3\\ x=-\frac{14}{23}, y=14\frac{12}{23}\end{array}\right\}$ 11. $\left.\begin{array}{l}x=2, y=3\\ x=-\frac{10}{3}, y=-\frac{7}{3}\end{array}\right\}$

12. $\begin{array}{l}x=\frac{1}{2}\{b\pm\sqrt{2a^2-b^2}\}\\ y=\frac{1}{2}\{b\mp\sqrt{2a^2-b^2}\}\end{array}$ 13. $\begin{array}{l}x=1, y=1\\ x=2\frac{1}{3}, y=-4\frac{1}{3}\end{array}$

14. $\begin{array}{l}x=3, y=-2\\ x=-2\frac{1}{2}, y=3\frac{1}{2}\end{array}$ 15. $\begin{array}{l}x=1, y=-\frac{1}{2}\\ x=1\frac{1}{2}, y=-\frac{1}{8}\end{array}$ 16. $\begin{array}{l}x=3, y=4\\ x=-1, y=-2\end{array}$

17 $\begin{array}{l}x=3, y=2\\ x=1\frac{2}{3}, y=2\frac{2}{3}\end{array}$ 18. $\begin{array}{l}x=3, y=5\\ x=-\frac{6}{17}, y=\frac{9}{17}\end{array}$

প্রশ্নমালা 5 (পৃঃ 65)

1. 420 ঘনফুট **2.** 400 ঘনফুট, 260 বর্গফুট। **3.** $333\frac{1}{3}$ ঘনফুট
4. 640 ঘ. ফু. **5.** 30 ফুট **6.** 8 সে. মি., 1152 ঘন সেঃ মি.
7. 1120 ঘন সে. মি. **8.** 4 সে. মি., 144 ঘন সে. মি.

প্রশ্নমালা 6 (পৃঃ 67)

1. (*i*) 616 ব. ই., $1437\frac{1}{3}$ ঘ. ই. (*ii*) 17 ব. ফু. 16 ব. ই., $11498\frac{2}{3}$ ঘ. ই.
(*iii*) 154 ব. ই., $179\frac{2}{3}$ ঘ. ই. (*iv*) $221\frac{19}{25}$ ব. ই., $310\frac{58}{125}$ ঘ. ই.
2. 7 ফুট, 154 ব. ফু. **3.** 6 মণ 24 সের **4.** $253\frac{43}{183}$ পা. **5.** 21952
6. 19404 ঘ.ই. ; 4158 ব.ই. **7.** 1000000 : 19683 **8.** 12 সে. মি.।

প্রশ্নমালা 7 (পৃঃ 67—69)

1. 326·8 গ্যা (প্রায়), 3268 পা. **2.** 46 মি. মি. **3.** 233 টা. 12 আ. 3 পা.
4. $75\frac{3}{7}$ বর্গফুট, $40\frac{1}{3}$ পা. **5.** 240 ঘন সে. মি. **6.** 6 মি. মি.
7. 360 ঘন সে. মি., 432 বর্গ সে. মি. **8.** 12 ফুট
9. 6 **10.** 5 ই., $3\frac{9}{11}$ ই. **11.** 128 বর্গ ই., 96 ঘন ই. **12.** 9 সে. মি.

স্থানাঙ্ক জ্যামিতি

অনুশীলনী 1 (পৃঃ 76)

4. (0,0), 0,0. **5.** $(P, -Q)$ **6.** x স্থানাঙ্ক।
7. (8, 7), (−2, 7), (−2, −1), (8, −1)

অনুশীলনী 2 (পৃঃ 78—79)

1. (*i*) 13, (*ii*) 5, (*iii*) 5 (*iv*) $\sqrt{2(m^2+n^2)}$ (*v*) c
2. (*i*) 5 (*ii*) 13 (*iii*) 25 (*iv*) $\sqrt{(x^2+y^2)(a^2+b^2)}$
9. 2 বা 10.

অনুশীলনী 3 (পৃঃ 83)

1. (*i*) (3, 1) (*ii*) (1, 1) (*iii*) (5, 2) (*iv*) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$
(*v*) (b, a) **2.** (5, 1), (−2, 3), (−1, −1) **3.** $(\frac{10}{7}, \frac{33}{7})$
4. (6, −6), (−23, 52) **5.** $(\frac{6}{7}, \frac{1}{7})$ **6.** $(-\frac{1}{3}, 0), (-\frac{5}{3}, 2)$
7. 17. **8.** (−3, 8) এবং (12, −2) **9.** 5

অনুশীলনী 4 (পৃঃ 86)

1. 19 2. 1 3. 21 4. 29 5. 2 6. $\frac{1}{2}(a^2+b^2)$
7. 6 8. $2ac$ 9. $2ac$ 10. ab 20. -5

অনুশীলনী 5 (পৃঃ 107—110)

1. $x+y=3$, $3\sqrt{2}$. 2. $4x+3y=12$ 3. $\frac{x}{\pm(5,12)}+\frac{y}{\pm(12,5)}=1$
4. $y=3x-7$, $8\frac{1}{6}$ sq. units 5. $3x+y-5=0$
6. $4x-3y+3=0$, 7. $x+y=-1$
9. $(2, 1)$, $\tan^{-1}\frac{7}{17}$ 10. $43x-29y=71$ 11. $y=3x$
12. $x+y+2=0$ 14. $3x+7y=0$ 15. $a_1a_2+b_1b_2=0$.
16. $2x+11y+25=0$ 18. $7x+6y-85=0$ 20. $3x-4y+7=0$

বীজগণিত

প্রশ্নমালা 1 (পৃঃ 116—117)

1. $\left.\begin{matrix}x=2, y=3\\ x=3, y=2\end{matrix}\right\}$ 2. $\left.\begin{matrix}x=4, y=3\\ x=3, y=4\end{matrix}\right\}$ 3. 5, 3

4. $\left.\begin{matrix}x=-2, y=-4\\ x=4, y=2\end{matrix}\right\}$ 5. $\begin{matrix}x=7, y=1\\ x=-\frac{103}{5}, y=\frac{97}{5}\end{matrix}$ 6. $\begin{matrix}x=\frac{6}{\sqrt{13}}, y=\frac{9}{\sqrt{13}}\\ x=\frac{-6}{\sqrt{13}}, y=\frac{-9}{\sqrt{13}}\end{matrix}$

7. $\left.\begin{matrix}x=4, y=9\\ x=9, y=4\end{matrix}\right\}$ 8. $x=2, y=5$ 9. $\left.\begin{matrix}x=-2, y=-7\\ x=7, y=2\end{matrix}\right\}$

10. $\left.\begin{matrix}x=4, y=3\\ x=-\frac{14}{23}, y=14\frac{12}{23}\end{matrix}\right\}$ 11. $\left.\begin{matrix}x=2, y=3\\ x=-\frac{10}{3}, y=-\frac{7}{3}\end{matrix}\right\}$

12. $\begin{matrix}x=\frac{1}{2}\{b\pm\sqrt{2a^2-b^2}\}\\ y=\frac{1}{2}\{b\mp\sqrt{2a^2-b^2}\}\end{matrix}$ 13. $\begin{matrix}x=1, y=1\\ x=2\frac{1}{5}, y=-4\frac{1}{3}\end{matrix}$

14. $\begin{matrix}x=3, y=-2\\ x=-2\frac{1}{2}, y=3\frac{1}{2}\end{matrix}$ 15. $\begin{matrix}x=1, y=-\frac{1}{2}\\ x=1\frac{1}{2}, y=-\frac{1}{8}\end{matrix}$ 16. $\begin{matrix}x=3, y=4\\ x=-1, y=-2\end{matrix}$

17. $\begin{matrix}x=3, y=2\\ x=1\frac{2}{3}, y=2\frac{2}{3}\end{matrix}$ 18. $\begin{matrix}x=3, y=5\\ x=-\frac{6}{17}, y=\frac{9}{17}\end{matrix}$

19. $x=\frac{b\pm\sqrt{a^2+ab+b^2}}{a+b}$, $y=\frac{a\mp\sqrt{a^2+ab+b^2}}{a+b}$

20. $x=a, y=b$; $x=y=\frac{1}{2}(a+b)$

21. $\left.\begin{array}{l}x=-3, y=1\\ x=\frac{1}{2}, y=-\frac{3}{4}\end{array}\right\}$ (প্রশ্নে প্রথম সমীকরণে '= 3' স্থলে '= 0' হইবে।

22. $\left.\begin{array}{l}x=2, y=2\\ x=-3, y=12\end{array}\right\}$

23. $\left.\begin{array}{l}x=1, y=-1\\ x=4, y=-5\end{array}\right\}$

24. $\left.\begin{array}{l}x=1, y=-1\\ x=5, y=-7\end{array}\right\}$

25. $\left.\begin{array}{l}x=\frac{1}{3}, y=\frac{1}{2}\\ x=\frac{5}{2}, y=\frac{-3}{5}\end{array}\right\}$

26. $x=3, y=6$; $x=6, y=3$

27. $\left.\begin{array}{l}x=10\\ y=1\end{array}\right\}$

28. $\left.\begin{array}{l}x=1, y=2\\ x=\frac{-20}{13}, \frac{37}{13}\end{array}\right\}$

29. $x=2, y=1$; $x=1, y=2$

30. $x=0, y=0$; $x=2, y=3$

31. $\left.\begin{array}{l}x=a\\ y=b\end{array}\right\}$

32. $\left.\begin{array}{l}x=-3, y=-2\\ x=1, y=2\end{array}\right\}$

33. $x=2, y=5$; $x=-2, y=-5$

34. $x=\frac{1\pm\sqrt{5a-1}}{5}$, $y=\frac{2\pm\sqrt{5a-1}}{5}$

35. $\left.\begin{array}{l}x=4, y=8\\ x=8, y=4\end{array}\right\}$

36. $\left.\begin{array}{l}x=6, y=10\\ x=4, y=15\end{array}\right\}$

37. $\left.\begin{array}{l}x=6, y=3\\ x=3, y=6\end{array}\right\}$

38. $\left.\begin{array}{l}x=\frac{1}{2}, y=1\\ x=-1, y=-\frac{1}{2}\end{array}\right\}$

39. $\left.\begin{array}{l}x=1, y=2\\ x=\frac{1}{2}, y=1\end{array}\right\}$

40. $\left.\begin{array}{l}x=2, y=8\\ x=8, y=2\end{array}\right\}$

41. $\left.\begin{array}{l}x=2\\ y=0\end{array}\right\}$ $\begin{array}{l}x=-12\\ y=-\frac{28}{3}\end{array}$ [প্রশ্নে $2x-3y=4$ দ্বিতীয় সমীকরণ হইবে।]

42. $\left.\begin{array}{l}x=9, x=4\\ y=4, y=9\end{array}\right\}$

43. $\left.\begin{array}{l}x=1, x=2\\ y=2, y=1\end{array}\right\}$

প্রশ্নমালা 2 (পৃঃ 124—125)

1. $a(e+f)-d(b+c)=0$

2. $m^2-n^2=4ab$

3. $p(c+r)=q(a-q)$

4. $(bg-cf)(af-bd)=(cd-ag)^2$

5. $a^2-b^2=8$

6. $a^3d^2-3abcd+b^3d+c^3=0$

7. $(bc_1-b_1c)(ab_1-a_1b)=(ca_1-c_1a)^3$

8. $\{ac_1{}^2-a_1(cc_1-b_1d)\}^2=\{b_1(cc_1-c_1(bc_1-a_1d)\}\{a_1(bc_1-a_1d)-ab_1c_1\}$

9. $(ad+bc)(c+a)=(d-b)^2$

10. $2ab(c^2+d^2)-(c^2-d^2)(a^2+b^2)=(a^2-b^2)^2$

11. $m(fc-bg)+n(aq-cd)-p(af-bd)=0$

12. $rq+ps=0$

13. $a^2-b-2c=0$

14. $a^3-2b-c=0$

15. $p^3-3pq+2r=0$

16. $r=p^4+4p^2q+2q^2$

17. $a_3(b_1c_2 - b_2c_1) + b^3(c_1a_2 - c_2a_1) + c^3(a_1b_2 - a_2b_1) = 0$

18. $\frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1} + \frac{c}{c+1} = 1$ **19.** $2abc = a + bc$

20. $a + b + c + abc = 0$ **21.** $a^3 - c^3 + 3d^3 - 3ab^2 = 0$

22. $n = x^{m^{\frac{1}{x}}}$ **23.** $\frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c} + \frac{d}{1+d} = 1$

প্রশ্নমালা 3 (পৃঃ 132—133)

1. 1, 2, 3,$\cdots$ **2.** 2, 5, 8, $\cdots$ **3.** 20, 15, 10,$\cdots$
4. $A, A+B, A+2B, \cdots$ **5.** $x, x+y, x+2y, \cdots$ **6.** 29
7. -18 **8.** 78 **9.** $4\frac{3}{4}$ **10.** $a + 28x$ **11.** $3n - 1$
12. $4n - 3$ **13.** $16 - 4n$ **14.** $a - (n-1)rd$
15. 34 **16.** 1 **17.** 3 **18.** 20-তম **19.** 11-তম
20. না। **21.** না। **22.** 38 **23.** 59, $2n - 1$ **24.** $12\frac{3}{7}, -9\frac{3}{7}$
25. $7n - 3$ **26.** 2, 5, 8,$\cdots$

27. $\frac{d(p-1) - c(q-1)}{p-q}, \frac{c-d}{p-q}$ **28.** $\frac{r(a-b) - (aq - bp)}{p-q}$

প্রশ্নমালা 4 (পৃঃ 136)

1. 10 **2.** 15 **3.** 2 **4.** $\frac{x+y}{2}$ **5.** $a^2 + b^2$
6. 6 **7.** 6, 9, 12, **8.** 6, 11, 16, 21, 26, 31, 36
9. 68, 132, 196, 260 **10.** 7 **11.** 9

প্রশ্নমালা 5 (পৃঃ 140—141)

1. 210 **2.** 1225 **3.** 650 **4.** 465
5. -180 **6.** $5(2a + 9b)$ **7.** $5(2a - 9b)$ **8.** $4(2n + 7)$
9. -204 **10.** $\frac{n}{2}(n^2 + 4n - 1)$ **11.** $-15, -60$
12. 1600 **13.** 6 **14.** 1080 **15.** 16549
16. (*i*) 520 (*ii*) 12853 **18.** 4000 **19.** 2530 **20.** 2475
21. 11 **22.** 3 বা -1, 10 বা 12 **23.** 19
24. 1, 2 **25.** n^2 **26.** 12 **27.** 550

28. (*i*) $\frac{n(5n+2)}{4}$, (*ii*) $\frac{5n^2 + 2n + 1}{4}$

প্রশ্নমালা 6 (পৃঃ 149)

1. $n^2(2n^2 - 1)$ **2.** $\frac{n(6n^2 + 3n - 1)}{2}$ **3.** $\frac{n}{2}(6n^2 + 21n + 23)$

4. $\frac{n}{12}(n+1)(n+2)(3n+5)$ **5.** $\frac{n}{2}(4n^2 + 17n + 21)$

6. $\frac{1}{3}n(n^2+6n+11)$ **7.** $\frac{1}{3}n(4n^2+18n-1)$
8. $\frac{1}{4}n(n+1)(n^2+9n+22)$ **9.** $\frac{1}{12}n(n+1)^2(n+2)$

10. $\frac{n}{4}(n^3+14n^2+71n+154)$ **11.** $\frac{n}{4(n+1)}$ **12.** $\frac{n}{3(5n+3)}$

13. $\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$ **14.** $\frac{n(n+1)(n+5)}{6}$

15. $\frac{n}{6}(n^2+12n+5)$ **16.** $\frac{n}{3}(n^2+3n-1)$

17. $\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$.

প্রশ্নমালা 7 (পৃঃ 155—157)

1. 55 **2.** 3, 13, 23 **8.** 6, 10, 14 বা, 14, 10, 6

9. n^2 **10.** $\frac{n}{2}(a+c)$ **11.** 3, 8, 13, 18 বা, 18, 13, 8, 3

13. 25 **14.** 50500 গজ **15.** 825 **16.** 468

প্রশ্নমালা 8 (পৃঃ 160)

1. 2187 **2.** $\frac{1}{512}$ **3.** 64, -512 **5.** $-\frac{1}{2^{2n-1}}, \frac{1}{2^n}$

6. x^{2p-1} **7.** $a^{\frac{1}{27}}$ **8.** 625 **9.** $(\frac{1}{2})^{\frac{1}{9}}$
10. $1, \frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \cdots$ **11.** দশম পদ।

প্রশ্নমালা 9 (পৃঃ 163)

1. $\frac{4}{15}$ **2.** x^2-y^2 **3.** $\frac{3}{2}, \frac{9}{4}, \frac{27}{8}$ **4.** 18, 54, 162, 486
5. $\left.\begin{array}{l}\frac{3}{2}, -3, 6, -12, 24\\ -\frac{3}{2}, -3, -6, -12, -24\end{array}\right\}$ **6.** 3, 27

প্রশ্নমালা 10 (পৃঃ 165)

1. 4095 **2.** $\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)$ **3.** 12093235 **4.** $\frac{819}{1024}$

5. $\frac{3^{\frac{n}{2}}-1}{3-\sqrt{3}}$ **6.** $\frac{(4+3\sqrt{2})\{1-(\sqrt{2}-1)^n\}}{2}$ **7.** $14\frac{99}{128}$

9. $\frac{a(1-a^n)}{1-a}-\frac{x(1-x^n)}{1-x}$

প্রশ্নমালা 11 (পৃঃ 169—170)

3. (i) $2(2^n-1)-n$ (ii) $\frac{3}{4}(3^n-1)+\frac{1}{2}n$
(iii) $6-\frac{2n+3}{2^n-1}$ (iv) $\frac{1}{16}\left(\frac{5^{n+2}-20n-25}{5^n}\right)$

4. (i) $\frac{10}{81}(10^n - 1) - \frac{1}{9}n$ (i) $\frac{40}{81}(10^n - 1) - \frac{4}{9}n$

(iii) $\frac{2}{9}n - \frac{2}{81}\left(1 - \frac{1}{10^n}\right)$ 10. 3, 6, 12 অথবা, 12, 6, 3

13. 1, 6, 11 14. 1, 3, 9

প্রশ্নমালা 12 (পৃঃ 186—187)

1. $6\frac{2}{3}$ 2. 20 3. 3 4. 42 5. 32
7. 2 9. ± 6 11. $5x = 3y$ 12. $5x = 4y$
13. $\frac{3}{10}$; $y(3x+20) = 2400$ 14. 25 15. 3825
16. 154 sq. ft. 17. 10 ft. 18. $w = 3\cdot6$, $d = 1\cdot2$
23. 250 in.

প্রশ্নমালা 13 (পৃঃ 191—192)

1. ·6060 2. $\bar{1}\cdot6232$ 3. $\bar{1}\cdot5441$ 4. $\bar{1}\cdot6811$
5. 2·0970 6. 2·7202 7. 2·3855 8. 3·3222
9. ·4438 10. ·4192 11. $\bar{1}\cdot5229$ 12. ·5599
13. ·3890 14. ·5663 15. ·3450 16. ·9320
17. 4 18. -6

প্রশ্নমালা 14 (পৃঃ 194)

1. 2·8833, 1·8833, ·8833, $\bar{1}\cdot8833$, $\bar{2}\cdot8833$, $\bar{3}\cdot8833$
2. (1) ·1655 (2) $\bar{2}\cdot1739$ (3) $\bar{2}\cdot6262$ (4) $\bar{5}\cdot9706$
(5) $\bar{1}\cdot1328$ (6) $\bar{6}\cdot0285$ (7) $\bar{1}\cdot6874$ (8) $\bar{1}\cdot9007$
3. (1) $\bar{1}\cdot2731$ (2) $\bar{1}\cdot0791$ (3) ·2731 (4) $\bar{1}\cdot6819$
(5) ·2269

প্রশ্নমালা 15 (পৃঃ 202—203)

(1) 1·5441 (2) 1·1673 (3) ·5145 (4) $\bar{1}\cdot2956$
(5) $\bar{1}\cdot7146$ (6) 1·2572 (7) ·7253 (8) ·4310
2. (1) 13·39 (2) 2·429 (3) ·1826 (4) ·02610
3. (i) 2·6162 (ii) 1·6162 (iii) ·6162 (iv) $\bar{1}\cdot6162$
(v) $\bar{2}\cdot6162$
4. (1) $\bar{1}\cdot5510$ (2) $\bar{1}\cdot6021$ (3) 2·6483 (4) $\bar{3}\cdot5199$
(5 $\bar{2}\cdot3244$ (6) $\bar{2}\cdot9137$ (7) 2·9064
5. $\bar{1}\cdot9711$
(1) 4·722 (2) 1·323 (3) 3·744 (4) ·4366
(5) 1·1550 (6) ·5527 (7) ·05163 (8) ·1805
(9) 3·287 (10) ·9632 (11) 33·09 (12) 8·567
(13) 1·449 (14) ·8921 (15) 5·568 (16) ·005623
(17) ·0007050 (18) 1·112 (19) ·001706 (20) ·07998
8. $-1\cdot2218$ 11. 18 12. (i) 16 (ii) ·9
15. $x = 1\cdot77$ (nearly) 16. $x = 2\cdot71$ (nearly), $y = 1\cdot71$ (nearly)

প্রশ্নমালা 16 (পৃঃ 215—216)

1. (i) $9\sqrt{3}-9\sqrt[3]{2}+3\sqrt{3}\sqrt[3]{4}-6+2\sqrt{3}\sqrt[3]{2}-2\sqrt[3]{4}$
(ii) $3\sqrt[3]{9}+3\sqrt[3]{3}\sqrt{2}+6+2\sqrt[3]{9}\sqrt{2}+4\sqrt[3]{3}+4\sqrt{2}$
(iii) $\sqrt[3]{2}+1$ **2.** $2-\sqrt{5}$ **3.** $\sqrt{8}-\sqrt{5}$
4. $2\sqrt{5}-\sqrt{3}$ **5.** $\sqrt{6}-1$ **6.** $\sqrt{x}+\sqrt{1-x}$
7. $\sqrt{a+1}+\sqrt{a-1}$ **8.** $\sqrt{a}+\sqrt{a-b}$ **9.** $\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{5}$
10. $\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{a-b}+\sqrt{b-c})$ **11.** $\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{x+y-z}+\sqrt{x-y+z})$
12. $1+\sqrt{2}-\sqrt{5}$ **14.** $\sqrt{\frac{x+y}{2}}+\sqrt{\frac{x-y}{2}}$
16. $\frac{14\sqrt{5}}{15}$ **17.** $2\frac{2}{7}$ **18.** $1+2^{\frac{3}{4}}+2.2^{\frac{1}{2}}-3.2^{\frac{1}{4}}$ **19.** 270[illegible]
22. $\sqrt{2}$ **23.** $\frac{1}{3}\sqrt{3}$ **24.** 1·618

প্রশ্নমালা 17 (পৃঃ 230—231)

1. (i) $19\sqrt{-1}$ (ii) $16\sqrt{-1}$ (iii) $-6\sqrt{6}$ (iv) $2\sqrt{[illegible]}$
2. (i) i (ii) -1 (iii) $-i$ (iv) $-i$
3. (i) $0+i$ (ii) $7+5i$ (iii) $\frac{37}{13}-\frac{16}{13}i$
4. (i) 5 (ii) $\frac{5}{13}$ (iii) $\frac{23}{13}$
5. (i) $\pm(5-3\sqrt{-2})$ (ii) $\pm(2-4i)$
(iii) $\pm(5-6\sqrt{-1})$ (iv) $\pm\{2+\sqrt{-7}\}$
(v) $2a+2\sqrt{a^2+b^2}$ (vi) $5-3\sqrt{-2}$
(vii) $\pm(2+3i)$ (viii) $\pm(3-4i)$
(ix) $\pm(3+7i)$ (x) $\pm\frac{1}{2}(\sqrt{-3}+1)$
6. 9 **7.** $\pm 3\sqrt{2}$ **8.** 4 **9.** 0 **12.** $\frac{2(a^2-b^2)}{a^2+b^2}$
13. $24\sqrt{-1}-17$ **14.** -238

ত্রিকোণমিতি

প্রশ্নমালা 1 (পৃ. 235)

(i) প্রথম ও দ্বিতীয় (quadrant) (ii) তৃতীয় ও চতুর্থ (iii) প্রথম ও চতুর্থ
(iv) দ্বিতীয় ও তৃতীয় (v) প্রথম ও তৃতীয় (vi) দ্বিতীয় ও চতুর্থ
(vii) প্রথম ও তৃতীয় (viii) দ্বিতীয় ও চতুর্থ (ix) প্রথম ও চতুর্থ
(x) দ্বিতীয় ও তৃতীয় (xi) প্রথম ও দ্বিতীয় (xii) তৃতীয় ও চতুর্থ

প্রশ্নমালা 2 (পৃঃ 252—253)

1. (*i*) $\sin 135^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $\cos 135^\circ = -\frac{1}{\sqrt{2}}$; $\tan 135^\circ = -1$;
$\cot 135^\circ = -1$, $\sec 135^\circ = -\sqrt{2}$, $\operatorname{cosec} 135^\circ = \sqrt{2}$

(*ii*) $\sin 150^\circ = \frac{1}{2}$; $\cos 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\tan 150^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ etc.

(*iii*) $\sin 210^\circ = -\frac{1}{2}$; $\cos 210^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\tan 210^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$ etc.

(*iv*) $\sin 225^\circ = -\frac{1}{\sqrt{2}}$; $\cos 225^\circ = -\frac{1}{\sqrt{2}}$; $\tan 225^\circ = 1$ etc.

(*v*) $\sin 240^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos 240^\circ = -\frac{1}{2}$; $\tan 240^\circ = \sqrt{3}$.

(*vi*) $\sin 300^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos 300^\circ = \frac{1}{2}$; $\tan 300^\circ = -\sqrt{3}$

(*vii*) $\sin 315^\circ = -\frac{1}{\sqrt{2}}$; $\cos 315^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $\tan 315^\circ = -1$

(*vii*) $\sin 330^\circ = -\frac{1}{2}$; $\cos 330^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\tan 330^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

(*ix*) $\sin 405^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $\cos 405 = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $\tan 405^\circ = 1$

(*x*) $\sin 480^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos 480^\circ = -\frac{1}{2}$; $\tan 480^\circ = -\sqrt{3}$

(*xi*) $\sin 750^\circ = \frac{1}{2}$; $\cos 750^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\tan 750^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$

(*xii*) $\sin 1215^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $\cos 1215^\circ = -\frac{1}{\sqrt{2}}$; $\tan 1215^\circ = -1$

(*xiii*) $\sin(-30^\circ) = -\frac{1}{2}$; $\cos(-30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\tan(-30^\circ) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

(*xiv*) $\sin(-60^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos(-60^\circ) = \frac{1}{2}$; $\tan(-60^\circ) = -\sqrt{3}$

(*xv*) $\sin(-120^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos(-120^\circ) = -\frac{1}{2}$; $\tan(-120^\circ) =$

(*xvi*) $\sin(-150^\circ) = -\frac{1}{2}$; $\cos(-150^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\tan(-150^\circ) =$

(xvii) $\sin(-210°)=\frac{1}{2}$; $\cos(-210°)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\tan(-210°)=-\frac{1}{\sqrt{3}}$

(xviii) $\sin(-390°)=-\frac{1}{2}$; $\cos(-390°)=\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\tan(-390°)=-\frac{1}{\sqrt{3}}$

(xix) $\sin(-855°)=-\frac{1}{\sqrt{2}}$; $\cos(-855°)=-\frac{1}{\sqrt{2}}$; $\tan(-855°)=1$

(xx) $\sin(-1110°)=-\frac{1}{2}$; $\cos(-1110°)=\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\tan(-1110°)=-\frac{1}{\sqrt{3}}$

2. (i) $-\cos\theta$ (ii) $\cos\theta$ (iii) $\cot\theta$ (iv) $-\tan\theta$

(v) $\operatorname{cosec}\theta$ (vi) $\operatorname{cosec}\theta$ (vii) $\sin\frac{\theta}{2}$

3. (i) $\sin 15°$ (ii) $-\sin 15°$ (iii) $\cot 20°$ (iv) $\cot 40°$

4. (i) 0 (ii) 0 (iii) -1

7. $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ **10.** 45°, 135°, 225°, 315° **13.** 0

14. 0 **16.** (i) 30° 150° (ii) 60°, 300°

45°, 225° (iv) 120°, 300°

প্রশ্নমালা 3 (পৃঃ 265—267)

1. 1 **8.** $\frac{1}{2}$ **20.** $(a-b)\tan\theta=ab$.

প্রশ্নমালা 4 (পৃঃ 272—273)

1. $2\sin 3\theta\sin\theta$ **12.** 0 **13.** $\tan 3A$ **14.**

প্রশ্নমালা 5 (পৃঃ 279—280)

10. $\frac{4\tan A(1-\tan^2 A)}{1-6\tan^2 A+\tan^4 A}$. **19.** $\tan 2\theta=c$; $\tan 4\theta=\frac{2c}{1-c^2}$

প্রশ্নমালা 6 (পৃঃ 294—295)

1. $\sin 12°=\frac{1}{8}(\sqrt{10+2\sqrt{5}}-\sqrt{15}+\sqrt{3})$

$\cos 12°=\frac{1}{8}(\sqrt{3}\sqrt{10+2\sqrt{5}}+\sqrt{5}-1)$

4. $\tan\frac{\pi}{8}=\sqrt{2}-1$; $\cot\frac{\pi}{8}=\sqrt{2}+1$

5. $\sin 165°=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$; $\cos 165°=-\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$

6. $\sin\frac{A}{2}=\frac{4}{5}$, $\cos\frac{A}{2}=\frac{3}{5}$. **9.** $\pm\frac{1}{3}$. **10.** $\frac{7}{5\sqrt{2}}$